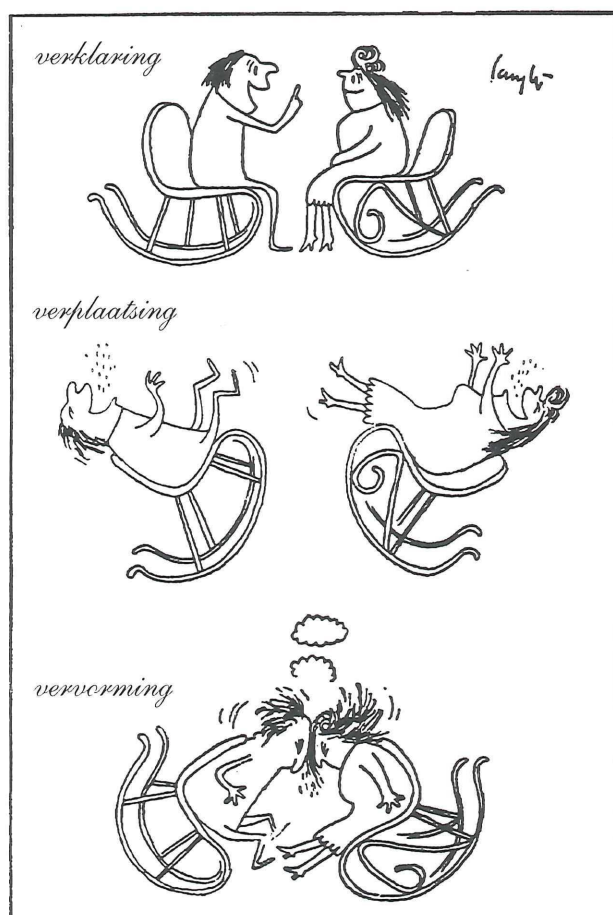


Prof. ir. W.J. Beranek

KRACHTSWERKING

Deel 5

VERVORMINGEN



KRACHTSWERKING

Deel 5

VERVORMINGEN

KNIK

Prof. ir. W.J. Beranek

500

KRACHTSWERKING Deel 5
VERVORMINGEN + KNIK
Februari 1999 [501-505] + [500 - 599] +
Appendix [A-501 - A-506] +
Trefwoordenlijst [T-01 - T-08]

Dit is een grotendeel nieuwe uitgave
waarin is opgenomen het deel Vervormingen van
KRACHTSWERKING 2 deel 1:
Januari 1990 [408-440]

500	21.1	INLEIDING
	21.1.1	Redenen voor het bepalen van de vervormingen
501	21.1.2	Berekening van de vervormingen
502	21.2	RELATIE BUIGEND MOMENT - VERVORMING
	21.2.1	Overzicht berekening statisch bepaalde liggers
504	21.2.2	Kromming
506	21.2.3	Relatie tussen doorbuiging en belasting
507	21.2.4	Integratie
508	21.3	ANALYTISCHE UITWERKING BASISLIGGERS
		<i>Berekening door integratie</i>
	21.3.1	Algemeen
	21.3.2	Liggers onder gelijkmatig verdeelde belasting
509	21.3.3	Overzicht basisliggers
510	21.3.4	Liggers op twee steunpunten
512	21.3.5	Diagrammen voor de drie basisliggers van serie A
514	21.3.6	Eenzijdig ingeklemde liggers
516	21.3.7	Maximale hoekverdraaiing en zakking bij de eenzijdig ingeklemde liggers
517	21.3.8	Verplaatsingen van een onbelast vrij uiteinde
518	21.3.9	Liggers op twee steunpunten uitsluitend belast door randmomenten
520	21.4	VERVORMINGEN BEPAALD DOOR SUPERPOSITIE
	21.4.1	Gebruik van de 'vergeet-me-nietjes'
	21.4.2	Vrij opgelegde liggers symmetrisch belast
522	21.4.3	Vrij opgelegde ligger met asymmetrische puntlast
523	21.4.4	Vrij opgelegde ligger met symmetrische oversteken
524	21.4.5	Controle statisch onbepaalde liggers
526	21.4.6	Weergave momentenlijnen
527	21.4.7	Momentensom

22 *Toepassing van vormveranderingsvergelijkingen voor
statisch onbepaalde constructies van eenvoudige aard*

- 528 22.1 INLEIDING
22.1.1 Berekening van statisch bepaalde constructies
- 529 22.1.2 Berekening van statisch onbepaalde constructies
22.1.3 Berekeningsmethoden
22.1.4 Vervormingen algemeen
- 530 22.2 DOORGAANDE LIGGERS
22.2.1 Aanpak van het probleem
- 532 22.2.2 Berekeningsmethode *Gelijkmatig verdeelde belasting*
- 534 22.2.3 Doorgaande liggers met gelijke overspanningen *Constante q-belasting*
- 536 22.2.4 Invloed randvelden
- 537 22.2.5 Velden afwisselend belast
- 538 22.2.6 Invloed randmoment
- 540 22.3 INLEIDING PORTALEN
22.3.1 Definitie portalen
- 541 22.3.2 Hoofdkrachtenwerking in portalen
- 542 22.4 KRACHTSWERKING IN GEKNIKTE LIGGERS
22.4.1 L-vormige ligger
- 543 22.4.2 Samenstel kolom en ligger
- 544 22.4.3 Spanningen ter plaatse van de knik
- 546 22.5 VERTICALE BELASTING OP PORTALEN
22.5.1 Gelijkmatig verdeelde belasting
- 548 22.5.2 Symmetrische ligger met onbelaste buitenvelden
- 550 22.5.3 Twee-scharnierspant
- 552 22.5.4 Vrij opgelegde ligger op twee ingeklemde stijlen
- 554 22.5.5 Volledig ingeklemd portaal
- 555 22.5.6 Algemene formules

556	23.1	INLEIDING
	23.1.1	Overzicht
557	23.1.2	Relatie normaalkracht – rekvervorming
558	23.2	VERVORMINGEN DOOR NORMAALKRACHT
	23.2.1	Vervorming van twee geschoorde staven
560	23.2.2	Verplaatsingen van een symmetrisch belast koord
561	23.2.3	Verplaatsingen bij willekeurige puntlasten
562	23.2.4	Williot <i>Vakwerken</i>
564	23.2.5	Versterkte balken
565	23.3	VERVORMINGEN DOOR BUIGENDE MOMENTEN
	23.3.1	Algemeen
566	23.3.2	Gesplitste differentiaal-vergelijkingen
568	23.4	MOMENTENVLAK-METHODE I <i>voor vrij opgelegde liggers</i>
	23.4.1	Algemeen
	23.4.2	Ligger met randmoment
570	23.4.3	Belasting door een puntlast
572	23.4.4	Gelijkmatig verdeelde belasting
573	23.4.5	Variërende buigstijfheid
574	23.5	MOMENTENVLAK-METHODE II <i>voor eenzijdig ingeklemde liggers</i>
	23.5.1	Bepaling van de rotatie en de doorbuiging
576	23.5.2	Recapitulatie van de 'vergeet-me-nietjes'
578	23.5.3	Algemene toepassing van momentenvlak-methode II
579	23.6	WILLEKEURIG GEKROMDE LIGGER <i>Momentenvlak-methode II</i>
	23.6.1	Constructievormen
	23.6.2	Bepaling vervormingen
580	23.6.3	Volledig ingeklemd portaal
581	23.6.4	Driescharnierspant

582	24.1	INLEIDING
	24.1.1	Het verschijnsel knik
583	24.1.2	Invloed van de vervormingen
584	24.2	BEPALING VAN DE KNIKKRACHT
	24.2.1	Knikberekening volgens Euler
586	24.2.2	Nadere beschouwing van het knikverschijnsel
587	24.2.3	Andere mogelijkheden voor knikvormen
	24.2.4	Knikformule van Euler in algemene vorm
588	24.3	STANDAARD-GEVALLEN
	24.3.1	Eenzijdig ingeklemde staaf
589	24.3.2	Schetsen van kniklijnen
590	24.3.3	Basis-belastinggevallen
592	24.4	KNIKSPANNING
	24.4.1	Algemeen
	24.4.2	Globale dimensionering
594	24.4.3	Knik in onderling loodrechte richtingen
595	24.4.4	Berekening van de knikspanning
596	24.5	KNIK BIJ BUIGING PLUS NORMAALKRACHT
	24.5.1	Algemeen
597	24.5.2	Sinusvormig verlopende belasting op een ligger
598	24.5.3	Sinusvormige belasting plus centrische druk
599	24.5.4	Globale dimensionering op moment + normaalkracht

APPENDIX (blz. 600-606)

A-500	24.6	BEPALING VAN DE KNIKKRACHT UIT MOMENT EN DOORBUIGING
	24.6.1	Sinusvormige gelijkmatig verdeelde belasting
A-501	24.7	KNIKKRACHT BIJ VERENDE INKLEMMINGEN
	24.7.1	Verend ingeklemde staaf
A-502	24.7.2	Aansluiting stijl-regel
A-503	24.7.3	Veerstijfheid bovenregel
A-504	24.7.2	Tweezijdig verend ingeklemde staaf
A-505	24.7.5	Verend ingeklemd portaal
A-506	24.7.6	Volledig ingeklemd portaal
T-01 – T-08		Trefwoordenlijst

kleine letters

a	versnelling	$[l t^{-2}]$
a, b, c	afstanden	$[l]$
b	breedte	$[l]$
d	middellijn	$[l]$
e	excentriciteit	$[l]$
d, e, f	afstanden	$[l]$
g	versnelling zwaartekracht	$[l t^{-2}]$
h	hoogte	$[l]$
i	oppervlakte-moment-arm	$[l]$
k	kernstraal	$[l]$
k	veerstijfheid (veerconstante)	$[k l^{-1}]$
l	lengte, overspanning	$[l]$
l_k	kniklengte	$[l]$
m	massa	$[m]$
n	aantal; vergrotingsfactor	$[1]$
p	kracht per oppervlakte	$[k l^{-2}]$
q	kracht per lengte	$[k l^{-1}]$
r	straal	$[l]$
t	tijd	$[t]$
t	dikte	$[l]$
u	verplaatsing	$[l]$
v	snelheid	$[l t^{-1}]$
w	doorbuiging	$[l]$
x, y, z	lengte-coördinaten	$[l]$
z	hefboomsarm	$[l]$

Griekse lettertekens

α, β, γ	hoeken	$[1]$
α	lineaire uitzettingscoëfficiënt	$[T^{-1}]$
α	grootte knikberekening	$[l^{-1}]$
γ	kracht per volume	$[k l^{-3}]$
γ	verkleining rechte hoek	$[1]$
ε	rek, relatieve vervorming	$[1]$
ϑ	geometrische stijfheidsverh.	$[1]$
κ	kromming	$[l^{-1}]$
λ	slankheid	$[1]$
μ	wrijvings-coëfficiënt	$[1]$
ν	contractie-coëfficiënt	$[1]$
ρ	massa per volume	$[m l^{-3}]$
σ	(normaal)spanning	$[k l^{-2}]$
τ	schuifspanning	$[k l^{-2}]$
φ	hoek (buiging)	$[1]$
ϕ	rotatie	$[1]$
ψ	hoek (afschuiving)	$[1]$

HOOFDLETTERS

A	oppervlakte	$[l^2]$
C	constante	$[1]$
E	elasticiteitsmodulus	$[k l^{-2}]$
F	uitwendige kracht	$[k]$
G	glijdingsmodulus	$[k l^{-2}]$
H	totale hoogte	$[l]$
I	kwadr. oppervlaktemoment	$[l^4]$
K	uitwendig moment, koppel	$[k l]$
L	totale lengte	$[l]$
M	buigend moment	$[k l]$
M_t	wringend moment	$[k l]$
N	normaalkracht	$[k]$
R	reactiekracht	$[k]$
R	kromtestraal	$[l]$
S	lineair oppervlaktemoment	$[l^3]$
S	staafkracht	$[k]$
V	volume, inhoud	$[l^3]$
V	dwarskracht	$[k]$
W	weerstandsmoment	$[l^3]$

Indices

v, V	verticaal	richting
h, H	horizontaal	
l, r	links, rechts	
\max	maximum	krachten
\min	minimum	
extr	extremum	
repr	representatief	belasting
mom	momentaan	
d	design (rekenwaarde)	
k	knik	

Dimensie

		Eenheid	
$[m]$	massa	kg	
$[l]$	lengte	m	mm
$[t]$	tijd	s	
$[k]$	kracht	kN	N
$[T]$	temperatuur	$^{\circ}\text{C}$	

21 VERVORMINGEN I

Vervormingen ten gevolge van buiging bepaald door integratie

21.1 INLEIDING

21.1.1 REDENEN VOOR HET BEPALEN VAN DE VERVORMINGEN

Spanningen en vervormingen zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden. Als krachten via een lichaam evenwicht met elkaar maken, moeten er in dat lichaam vervormingen optreden, hoe klein die ook mogen zijn.

In feite kunnen we aan zo'n lichaam alleen maar vervormingen en verplaatsingen constateren. De begrippen kracht en spanning hebben we zelf moeten invoeren om het mechanisch gedrag van het lichaam te kunnen beschrijven. Hierbij moeten we er voor zorgen dat de vervormingen van het lichaam niet zo groot worden dat het zijn samenhang verliest, zodat het bezwijkt.

Maar ook lang voordat de bezwijktoestand optreedt kunnen de vervormingen van constructieonderdelen al zo groot worden dat we die vervormingen willen beperken. Dat kunnen esthetische redenen zijn, bijv. omdat we enige doorhang van onderdelen niet mooi vinden. Maar er zijn ook zwaarwegender redenen.

Wanneer een constructie-onderdeel door de belasting te veel doorbuigt, kan het door de veranderlijke belasting (wind, lopende mensen) gemakkelijk in trilling raken. Dergelijke trillingen worden door mensen snel als hinderlijk ervaren en ook als gevaarlijk beschouwd.

Maar er zijn voor bouwkundige onderdelen ook prozaïscher redenen te bedenken om de vervormingen te beperken. Bij te grote vervormingen kunnen onderdelen, die verondersteld worden elkaar niet te raken, op elkaar gaan rusten. Hierdoor kunnen krachten worden overgedragen waar deze onderdelen niet tegen bestand zijn, zodat ze gaan scheuren. Op zich behoeven deze scheuren niet gevaarlijk te zijn; maar eigenaren en gebruikers van dergelijke gebouwen zullen hier meestal korzelig op reageren.

Een laatste zwaarwegende reden: verreweg de meeste bouwconstructies zijn statisch onbepaalde constructies en kunnen alleen worden berekend door de vervormingen mede in de beschouwingen op te nemen.

21.1.2 BEREKENING VAN DE VERVORMINGEN

In KW-0 en KW-4 hebben we eigenlijk alleen maar de verlenging of verkorting van prismatische staven onder centrische trek of druk berekend [095–096] en [415]. Voorts hebben we besproken dat een gelijkmatige temperatuursverhoging of verlaging eveneens verlenging c.q. verkorting van staven teweeg kan brengen, zie KW-0 [097].

We willen er hier nog eens met nadruk op wijzen dat verlengingen en verkortingen door temperatuursinvloeden een veelvoud kunnen bedragen van de vervormingen die ontstaan door de belastingen die op zo'n onderdeel werken.

Bij de bespreking van het gedrag van staafwerken in KW-3 [302] is ter sprake gekomen, dat de vervormingen door normaalkrachten aanmerkelijk kleiner zijn dan die door buigende momenten. Aan de eenvoudige speelmodellen die daartoe zijn gebruikt, is dit gemakkelijk te constateren. Terwijl de rekvervormingen echter vrij gemakkelijk te berekenen zijn, geldt dit niet voor de buigvervormingen.

Bij de visualisering van de verschijnselen gebeurt het omgekeerde. Rekvervormingen zijn niet te zien, terwijl de buigvervormingen – de doorbuigingen dus – overduidelijk zichtbaar zijn, zie fig. 1a. Als we naar zo'n model kijken, kunnen we ook wel aanwijzen waar de helling van het model maximaal is of juist gelijk aan nul. Maar als we voor zo'n doorgebogen balkje het verloop van de hellingen grafisch willen uitzetten, dan moeten we toch even goed nadenken om dit correct te doen, zie fig. 1b.

De kromming van het balkje is de mate waarin het 'rond' gaat staan. Het oog is nauwelijks in staat om hier nog numerieke verschillen aan te kunnen geven. Het enige dat we goed kunnen zien is of er een positief buigend moment optreedt of een negatief, zie fig. 1c. Ook de liggerdelen waarin geen buiging optreedt zijn gemakkelijk te herkennen, omdat ze recht blijven.

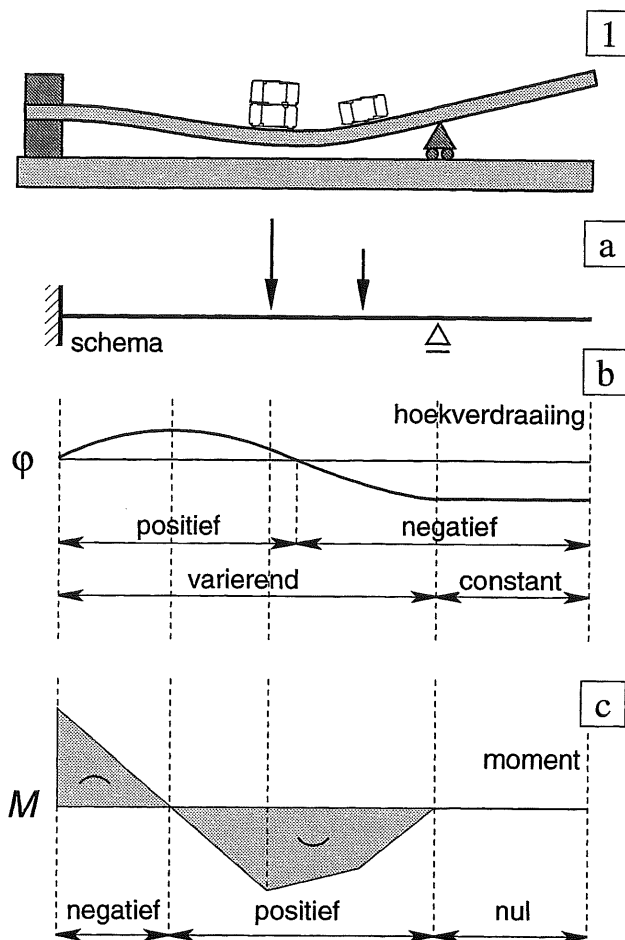


Fig. 1 Analyse van de vervormingen van een speelmodel voor een statisch onbepaalde ligger links: volledige inklemming rechts: roloplegging met overstek

- Tekening van het vervormde model
- Schema met het verloop van de hellingen
- Momentenlijn met aanduiding van de gebieden met een positief en een negatief buigend moment

Bij de berekening van statisch bepaalde liggers kunnen we het verloop van het buigend moment – zij het na enige oefening – toch nog betrekkelijk gemakkelijk bepalen.

Over de berekening van de daaruit volgende doorbuigingen hebben we echter nauwelijks gesproken. Terwijl een speelmodelltje de doorbuiging zonder meer aangeeft, blijkt de berekening van de doorbuigingen van een ligger juist het meest bewerkelijke en omslachtige onderdeel te vormen.

21.2.1 OVERZICHT BEREKENING STATISCH BEPAALDE LIGGERS

We geven allereerst een recapitulatie van de berekening van een statische bepaalde constructie. Ter bepaling van de gedachte is hiervoor een vrij opgelegde ligger gekozen.

1. Het schema van de ligger met de opleggingen wordt bekend verondersteld, zie fig. 1a. De belastingen zijn gegeven.
2. Met behulp van de evenwichtsvoorwaarden kunnen dan de oplegreacties in grootte en richting worden bepaald, zie fig. 1b.
3. Aangezien de verticale en horizontale componenten van alle krachten bekend zijn, kunnen de diagrammen voor de snedekrachten worden bepaald, zie fig. 1c:
 - de dwarskrachtenlijn
 - de momentenlijn
 - de normaalkrachtenlijn
4. Als de doorsnede van de ligger bekend is kunnen de benodigde doorsnede-grootheden worden bepaald:
 - het oppervlak A
 - de zwaartepuntsafstand z_0
 - het kwadratisch oppervlakte-moment I_y
5. Vervolgens kunnen de spanningen worden berekend:
 - buigspanningen (ten gevolge van M)
 - normaalspanningen (t.g.v. N)
 - schuifspanningen (ten gevolge van V)

In KW-3 is meestal de weg gevolgd zoals die in de punten 1. t/m 5. is aangegeven. In de praktijk kennen we meestal de juiste doorsnedeform nog niet maar moeten we die juist zien te bepalen. Hiertoe kunnen we eveneens gebruik maken van de gegevens vermeld onder 4. en 5., maar dan in een meer algemene formulevorm.

6. Bij het dimensioneren van een ligger worden aan de hand van spanningen, die niet mogen worden overschreden, de afmetingen van de ligger bepaald, uitgaande van een gewenste doorsnedeform (rechthoek; I-profiel; etc.).

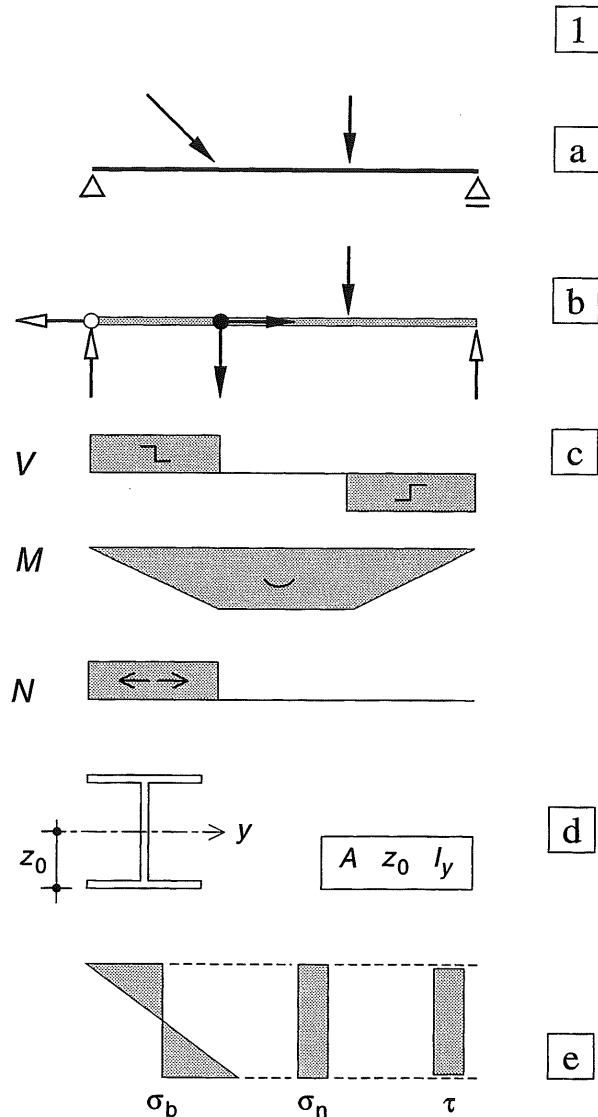


Fig. 1 Opeenvolgende stappen bij de berekening van een ligger

- a. Schema
- b. Bepaling oplegreacties
- c. Diagrammen voor de snedekrachten V , M , N
- d. Bepaling doorsnede-grootheden bij gegeven profielafmetingen: A , z_0 , I_y
- e. Berekening van de buigspanningen (t.g.v. M)
normaalspanningen (t.g.v. N) en
schuifspanningen (t.g.v. V)

NB: Bij de hierboven gegeven berekening – waarbij ook horizontale krachten optreden – zou de balk eigenlijk ondersteund moeten zijn ter plaatse van de neutrale lijn. Als de normaalkracht aanzienlijk is, moet rekening worden gehouden met de hoogte waarop de uitwendige krachten aangrijpen, zie fig. 2.

Een nadere uitwerking van het dimensioneren volgt pas in KW-8. Dit moet namelijk in principe worden uitgevoerd voor de bezwijktoestand. Daarbij komt een rekenprocedure aan de orde, waarin kansrekening een rol speelt, en ook rekening wordt gehouden met niet lineaire materiaaleigenschappen. Hier zullen we ons voorlopig nog niet mee bezig houden.

7. Als het verloop van de snedekrachten is bepaald en ook de doorsnede-grootheden bekend zijn, kunnen de vervormingen worden berekend.

Het berekenen van de buigvervormingen wordt behandeld in het voorliggende hoofdstuk 21. Dit kan weer in algemene termen gebeuren omdat het gehele vervormingsbeeld omgekeerd evenredig is met de buigstijfheid EI .

Statisch onbepaalde liggers

8. Met behulp van de kennis van de vervormingen kan ook de krachswerking in statisch onbepaalde constructies worden bepaald.

Statisch onbepaalde constructies worden namelijk eerst statisch bepaald gemaakt door het teveel aan oplegreacties te verwijderen, zie KW-2 [204-205]. De krachswerking en de vervormingen van deze statisch bepaalde constructie kunnen dan worden berekend.

Vervolgens kan worden aangegeven welke extra vervormingen nodig zijn om de verwijderde oplegreacties weer te kunnen aanbrengen en welke extra krachten daaruit voortvloeien.

Superpositie van beide krachtensystemen levert dan de krachswerking in de statisch onbepaalde constructie.

Invloed van de liggerhoogte op de snedekrachten

Het bepalen van de krachswerking – rekening houdend met de hoogte van de ligger – is alleen zinvol als de horizontale krachten van enige importantie zijn.

De kracht F_1 kan worden ontbonden in F_{1H} en F_{1V} ter plaatse van het aangrijpingspunt P aan de bovenzijde van de ligger, maar de kracht kan ook langs haar werklijn worden verplaatst tot punt Q op de aslijn van de ligger en daar worden ontbonden.

Bij de bepaling van de oplegreacties wordt het momentenevenwicht opgemaakt om een punt van de aslijn. Hierdoor levert de reactiekracht R_{AH} ook een bijdrage aan het momentenevenwicht.

Bij de bepaling van de diagrammen voor de snedekrachten, kunnen we R_{AH} naar de aslijn verplaatsen door een koppel in te voeren. Hierdoor grijpt ter plaatse van het oplegpunt A een positief buigend moment aan.

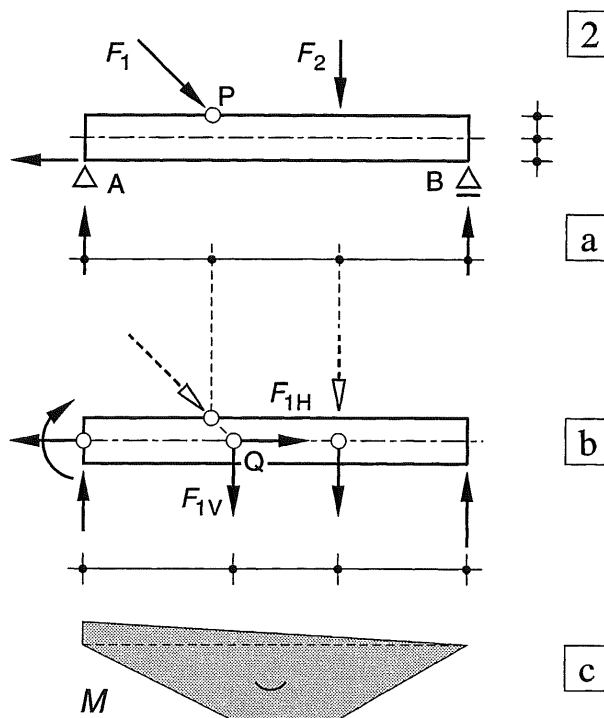


Fig. 2 Strikt formele aanpak bij invoering van de liggerhoogte in de berekening

- Schema met oplegreacties
- Verplaatsen van alle krachten naar de aslijn (dus zowel F_1 en F_2 als R_{AH})
- Momentenlijn

21.2.2 KROMMING

Voor de bepaling van de vervorming van een prismatische ligger van bekende afmetingen onder een gegeven belasting kunnen we volstaan met de berekening van het vervormingsverloop van de liggeras. In onbelaste toestand laten we de liggeras samenvallen met de x -as, zoals is weergegeven in fig. 1a.

We roepen verder in herinnering dat de liggeras niet van lengte verandert ten gevolge van buiging.

Voorts mogen we bij kleine vervormingen aannemen dat de projectie van de gebogen liggeras gelijk is aan de oorspronkelijke lengte, zie fig. 1b.

De verplaatsingen van alle andere punten van de werkelijke doorsnede liggen dan vast omdat vlakke doorsneden vlak blijven en loodrecht op de gebogen liggeras zijn gericht, zie fig. 1b.

Bij alle verdere berekeningen zullen we steeds aannemen dat de buiging plaats vindt om een hoofdas die loodrecht op het vlak van tekening staat, zodat alle vervormingen in het vlak van tekening liggen. Deze vervormde liggeras wordt ook wel aangeduid als *elastische lijn*, zie fig. 1c.

De afleiding van de spanningsverdeling in een liggermootje dat is onderworpen aan een zuiver buigend moment is weergegeven in KW-4 [422-427]. De bijbehorende vervormingen van het liggermootje is nogmaals weergegeven in fig. 2. Als belangrijkste formules zijn in KW-4 naar voren gekomen: [423-(15)-(16)] en [425-(22)].

De twee eerstgenoemde formules zijn hier samengevat tot formule (1), waarbij vanwege de kleine vervormingen de booglenkte ds is vervangen door zijn projectie dx . Hierdoor kan namelijk een aanmerkelijke vereenvoudiging van de verdere berekening worden verkregen. Ter wille van de eenvoud zijn alle formules hernummerd.

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \approx \frac{d\varphi}{dx} \quad (1)$$

De derde formule kan in zijn oorspronkelijke vorm worden gehandhaafd.

$$M = \frac{EI}{R} \quad (2)$$

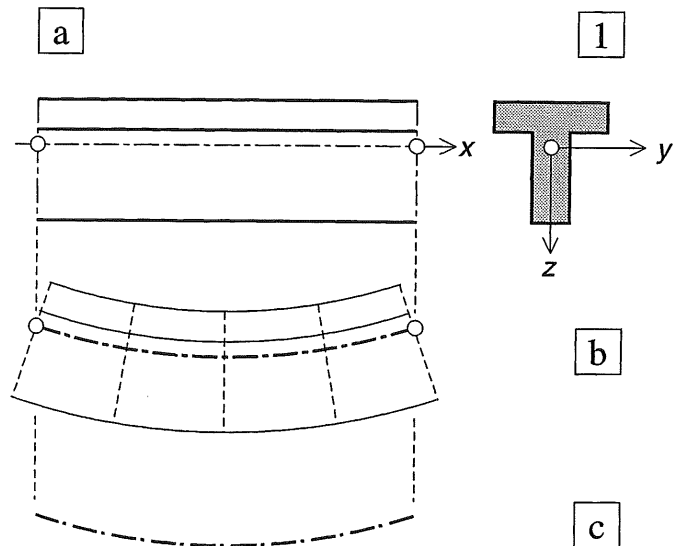


Fig. 1 Bepaling van de elastische lijn

- a. Zij-aanzicht van een T-balk met neutrale lijn en zwaartepunt van de normale doorsnede
- b. Sterk overdreven vervormingen na belasting; vlakke doorsneden blijven vlak
- c. Elastische lijn afzonderlijk weergegeven

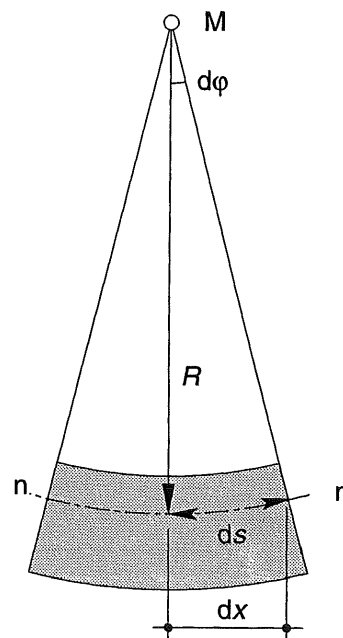


Fig. 2 Vervorming van een balkmoot bij zuivere buiging

3

In fig. 3a is een stukje elastische lijn weergegeven van een gebogen liggerdeel. De verticale verplaatsingen van de liggeras worden hierbij aangegeven met het symbool w .

In de tekening zijn de zakking w , de helling φ en de kromming κ , alle drie weergegeven als positieve grootheden.

zakking: positief in positieve w -richting, dus omlaag gericht,

helling: positief als bij toenemende x , ook de positieve zakking toeneemt,

kromming: positief als bij toenemende x , ook de positieve helling toeneemt.

Let op: de oorsprong van de z -coördinaat verplaatst mee met de ligger-as en wordt loodrecht op de ligger-as gemeten; fig. 3b. De z -coördinaat wordt uitsluitend gebruikt om de positie van een punt in de normale doorsnede aan te geven ten opzichte van de y -as door het zwaartepunt.

We beschouwen fig. 3 waarin de hoek φ de helling van de liggeras voorstelt. De toename van φ over een afstandje dx is dan gelijk aan $d\varphi$.

$$\varphi = \frac{dw}{dx} \quad \text{differentiatie levert dan:}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2}$$

Dit betekent dat we de kromming κ uit formule (1) kunnen vervangen door d^2w/dx^2 , waardoor formule (1) overgaat in:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{R} \quad (3)$$

We kunnen nu de factor $1/R$ in formule (2) vervangen door de waarde volgens formule (3). Hierbij moeten we echter een $-$ teken invoeren, omdat we nu eenmaal hebben afgesproken dat bij een *positieve* kromming zoals weergegeven in fig. 3a en fig. 4, het buigend moment *negatief* wordt genoemd. We vinden dan:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} \quad (4)$$

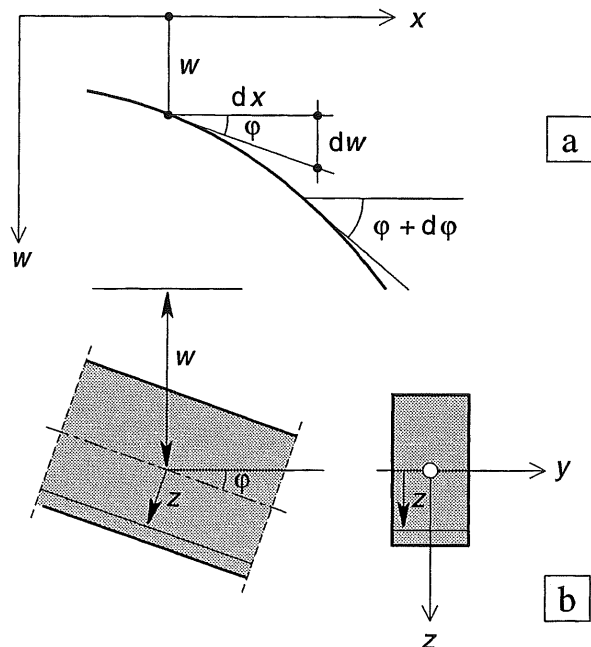


Fig. 3 Stukje van de elastische lijn
a. Positieve waarden van de zakking, de hoekverdraaiing en de kromming
b. Betekenis van w (doorbuiging) en z (afstand vanaf de neutrale lijn)

4

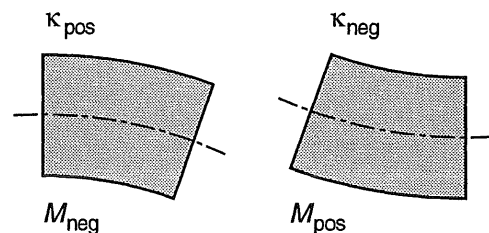


Fig. 4 De kromming en het bijbehorende buigend moment zijn (voor horizontale liggers) altijd tegengesteld van teken

21.2.3 RELATIE TUSSEN DOORBUIGING EN BELASTING

Met behulp van de betrekking tussen de kromming en het buigend moment [505-(4)] en de reeds in KW-2 afgeleide betrekking tussen de belasting en het buigend moment [263-(11)], kunnen we nu een verband leggen tussen de zakkingsverloop en de belasting.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = - q_x \quad (5)$$

Uit formule (4) volgt:

Als het zakkingsverloop w bekend is kan door twee maal differentiëren (en vermenigvuldigen met EI) het momentenverloop worden gevonden.

Uit formule (5) volgt:

Als het momentenverloop bekend is kan weer door twee maal differentiëren het verloop van de belasting q_x worden gevonden.

De twee differentiaalvergelijkingen (4) en (5) kunnen worden worden samengevat tot één vergelijking door (4) twee maal te differentiëren naar x en vervolgens in (5) te substituëren:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{-1}{EI} \frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{+ q_x}{EI} \quad (6)$$

Hieronder zijn de stappen één voor één weergegeven. Vergelijk zo nodig de formules uit KW-2 [263-(10b)] voor V_x en [262-(9b)] voor q_x .

$$w \quad (7a)$$

$$dw/dx = + \varphi_x \quad (7b)$$

$$d^2 w/dx^2 = - M_x / EI \quad (7c)$$

$$d^3 w/dx^3 = - V_x / EI \quad (7d)$$

$$d^4 w/dx^4 = + q_x / EI \quad (7e)$$

Formules uit KW-2:

$$V_x = dM_x / dx \quad [263-(10b)]$$

$$q_x = - dV_x / dx \quad [262 - (9b)]$$

21.2.4 INTEGRATIE

De analytische uitdrukking voor de doorbuiging w – waaruit we door $4 \times$ differentiëren alle gegevens kunnen afleiden – is echter nog onbekend. We moeten daarom omgekeerd te werk gaan en de doorbuiging uit de belasting zien te bepalen, waarvan de analytische uitdrukking voor een q -last in het algemeen wèl bekend is. In algemene termen is dat gemakkelijk neergeschreven. Uit vergelijking (6) volgt:

$$w = \int \int \int \int \frac{q_x}{EI} dx \quad (8)$$

Door de belasting $4 \times$ te integreren vinden we een analytische uitdrukking voor de gezochte doorbuiging. Aangezien we dit stap voor stap moeten doen, vinden we tegelijkertijd ook analytische uitdrukkingen voor φ , M en V .

Beschouwen we de vergelijkingen (7) in omgekeerde volgorde, dus van (7e) tot en met (7a), dan vinden we voor de opeenvolgende integraties:

$$q_x \quad (9a)$$

$$V_x = \int -q_x dx \quad (9b)$$

$$M_x = \int +V_x dx \quad (9c)$$

$$\varphi_x = \int +\kappa_x dx = \frac{1}{EI} \int -M_x dx \quad (9d)$$

$$w_x = \int +\varphi_x dx \quad (9e)$$

Vanwege het belang van de formules (9) zijn ze met een dik kader omrand. Dit houdt niet in dat ze uit het hoofd moeten worden geleerd, maar wel dat de student ze moet kunnen terugvinden en waar nodig ook toepassen.

Bedenk dat er twee sets grootheden zijn:

1. de grootheden die de geometrie van de vervormde ligger bepalen,
2. de grootheden die het krachtenspel in de ligger bepalen.

Beide sets zijn onderling rechtstreeks gekoppeld; de koppeling tussen beide sets moet steeds via de buigstijfheid EI geschieden.

1.	2.	
w		
φ		
κ		
	$\leftarrow EI \rightarrow$	
		M
		V
		q

Voor het zeer veel voorkomende geval van een ligger onder een gelijkmatig verdeelde belasting, is de berekening in algemene termen uitgewerkt in [508].

21.3.1 ALGEMEEN

De bepaling van het krachtenspel en het vervormingsverloop van liggers door middel van integratie is alleen voor een aantal eenvoudige standaardgevallen aantrekkelijk. Deze zijn in [509] nader omschreven.

Ook voor deze standaardgevallen zullen we later eenvoudigere en snellere berekeningswijzen leren kennen; de momentenvlakmethoden I [558] en II [574]. Desalnietemin beginnen we toch met de analytische aanpak om twee redenen:

Eenzijds kunnen we het verloop van de diverse grootheden in een gesloten analytische functie vastleggen, zodat de waarde in elk punt van de kromme eenduidig kan worden bepaald.

Anderzijds zijn we op deze wijze in staat om alvast enkele belangrijke statisch *onbepaalde* liggers te berekenen, zonder nog enige voorkennis te bezitten van de manier waarop we de vervormingen moeten bepalen.

Van de studenten wordt niet verwacht dat ze dit soort berekeningen zelfstandig zullen uitvoeren. Het is echter essentieel dat ze de uitkomsten van de berekeningen op de volgende bladen terug weten te vinden en dat ze de resultaten op adequate wijze kunnen toepassen.

21.3.2 LIGGERS ONDER GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING

Voor het geval van een ligger onder een constante gelijkmatig verdeelde belasting kunnen de algemene formules [507-(9)] nader worden uitgewerkt als functies van x . Dit is weergegeven aan de onderzijde van deze bladzijde. De aanzet hiertoe is in feite al gegeven in KW-2 [268].

De daar afgeleide formules [268-(17) en (18)] komen geheel overeen met de onderstaande formules (10b) en (10c). Maar terwijl daar moest worden gestopt bij de berekening van het buigend moment, kunnen we er hier nog twee stappen aan toevoegen en ook de hellingen en de doorbuigingen bepalen.

Bij elke keer integreren moet een nieuwe integratieconstante worden ingevoerd. De waarden hiervan kunnen achteraf worden bepaald uit de randvoorwaarden. Voor elke vergelijking moeten we aan beide ligger-einden nagaan of een of meer van de volgende grootheden gelijk moeten zijn aan nul: w , φ , M of V .

Omdat we nu ook randvoorwaarden op kunnen stellen voor *geometrische* grootheden – zakking en hoekverdraaiing – zijn een aantal eenvoudige statisch *onbepaalde* liggers op dezelfde wijze te berekenen als vergelijkbare statisch *bepaalde* liggers.

SNEDEKRACHTEN EN VERVORMINGEN BIJ LIGGERS ONDERWORPEN AAN EEN GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING

$$q_x = +q \quad (10a)$$

$$V_x = - \int q \, dx = -q x + C_1 \quad (10b)$$

$$M_x = + \int V_x \, dx = -1/2 q x^2 + C_1 x + C_2 \quad (10c)$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= + \int d^2w/dx^2 \, dx = \frac{1}{EI} \int -M_x \, dx = \\ &= \frac{1}{EI} (+1/6 q x^3 - 1/2 C_1 x^2 - C_2 x + C_3) \end{aligned} \quad (10d)$$

$$\begin{aligned} w_x &= + \int dw/dx \, dx = \int + \varphi_x \, dx = \\ &= \frac{1}{EI} (+1/24 q x^4 - 1/6 C_1 x^3 - 1/2 C_2 x^2 + C_3 x + C_4) \end{aligned} \quad (10e)$$

21.3.3 OVERZICHT BASISLIGGERS

Het aantal liggers dat op eenvoudige wijze door integratie kan worden berekend, is beperkt. De ligger zelf moet over de gehele lengte zijn belast door een constante (of driehoekig verlopende) gelijkmatig verdeelde belasting. Deze belasting mag ook gelijk zijn aan nul.

Uitwendige krachten en momenten mogen alleen aan de ligger-uiteinden aangrijpen.

We kunnen dan drie soorten basisliggers onderscheiden: A – B – C

A Liggers die aan beide uiteinden star zijn ondersteund en zijn onderworpen aan een gelijkmatig verdeelde belasting, zie fig. 1.

Opleggingen:

- A1 scharnier + scharnier (c.q. rol)
- A2 inklemming + scharnier (c.q. rol)
- A3 inklemming + inklemming

B Liggers die aan één zijde volledig zijn ingeklemd en zijn onderworpen aan een randkracht of een q -last, zie fig. 2.

- B1 Koppel
- B2 Puntlast
- B3 Gelijkmatig verdeelde belasting

C Liggers die aan beide uiteinden star zijn ondersteund en verder uitsluitend zijn onderworpen aan randmomenten, zie fig. 3.

Opleggingen:

- C1 scharnier + scharnier (1 randmoment)
- C2 scharnier + scharnier (2 randmomenten)
- C3 inklemming + scharnier (1 randmoment)

Groep A: Deze liggers zullen we vaak in de praktijk tegenkomen.

Groep B: De resultaten worden gebruikt om voor een veelvoud van andere liggers de maximale hellingen en doorbuigingen snel te kunnen bepalen.

Groep C: De resultaten worden gebruikt om statisch onbepaalde liggers en portalen te berekenen.

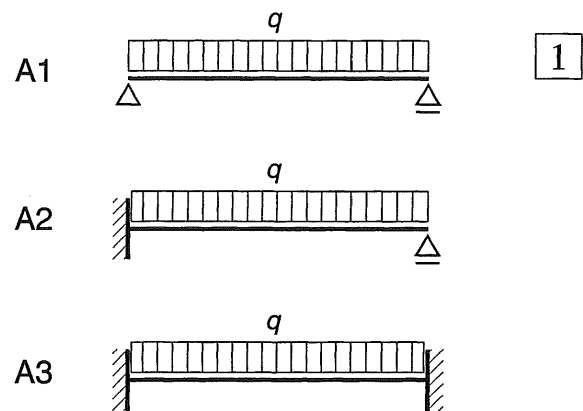


Fig. 1 BASISLIGGERS SERIE A

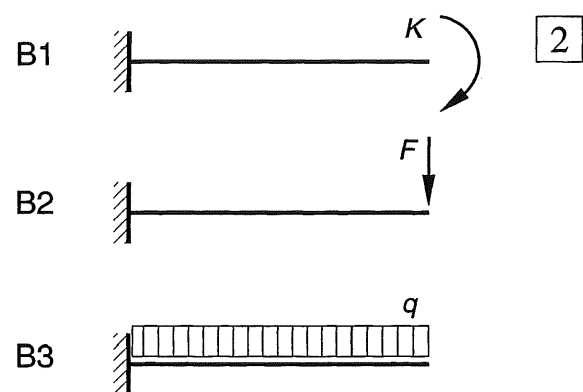


Fig. 2 BASISLIGGERS SERIE B

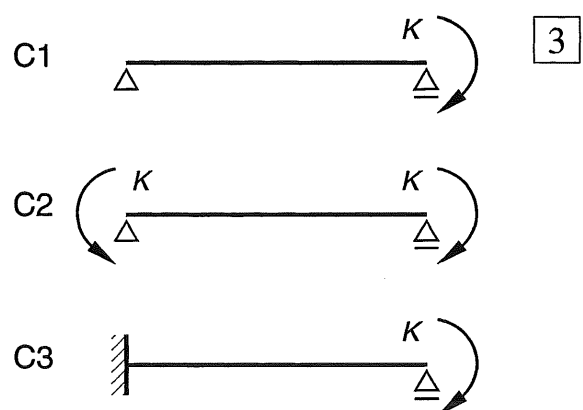


Fig. 3 BASISLIGGERS SERIE C

21.3.4 LIGGERS OP 2 STEUNPUNTEN

Gelijkmatig verdeelde belasting

De basisliggers uit serie A zullen we veelvuldig bij ontwerp en berekening tegen komen:

- A1 Vrij opgelegde ligger, zie fig. 1a.
 Starre ondersteuning aan de uiteinden door een scharnier en een rol (rol meestal weer vervangen door een scharnier als horizontale reactiekrachten ontbreken).
- A2 Ligger aan één zijde volledig ingeklemd en aan de andere zijde (star) ondersteund door een rol (c.q. scharnier), zie fig. 1b.
- A3 Volledig ingeklemde ligger, zie fig. 1c.
 De ligger is aan beide zijden volledig ingeklemd.

Geval A1 is statisch bepaald;

Geval A2 is éénvoudig statisch onbepaald;

Geval A3 is drievoudig statisch onbepaald.

(de *graad* van statisch onbepaaldheid is besproken in KW-2 [204]).

Toch kunnen de drie gevallen op volkomen overeenkomstige wijze worden berekend door het invoeren van de juiste randvoorwaarden.

Vooruitlopend op de berekening is in fig. 2 voor de drie gevallen het doorbuigingsverloop geschetst, uitgaande van dezelfde overspanning l , dezelfde buigstijfheid EI maar een gelijkmatig verdeelde belasting q van ongelijke grootte.

Maar ook als de lezer dit doorbuigingsverloop slechts zeer globaal zou kunnen aangeven, kunnen toch een aantal zaken met zekerheid worden gesteld:

- Bij elke starre ondersteuning zal de doorbuiging gelijk moeten zijn aan nul.
- Bij elke volledige inklemming zal ook de hoekverdraaiing gelijk moeten zijn aan nul.
- Bij een rol of een scharnier of een vrij zwend uiteinde zal het buigend moment gelijk moeten zijn aan nul.

Deze laatste stelling houdt in dat zo'n *oplegging* geen moment op het ligger-uiteinde kan overdragen. Maar het staat ons wel vrij om *zelf* een koppelpop op zo'n ligger-uiteinde te laten aangrijpen.

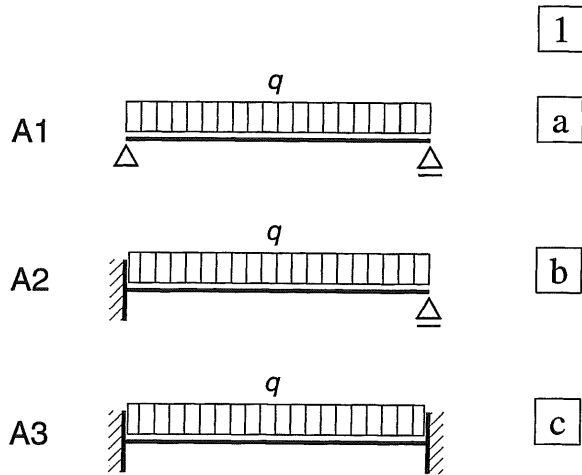


Fig. 1 Randvoorwaarden voor de basisliggers van serie A: gelijkmatig verdeelde belaste liggers die aan beide uiteinden star zijn ondersteund

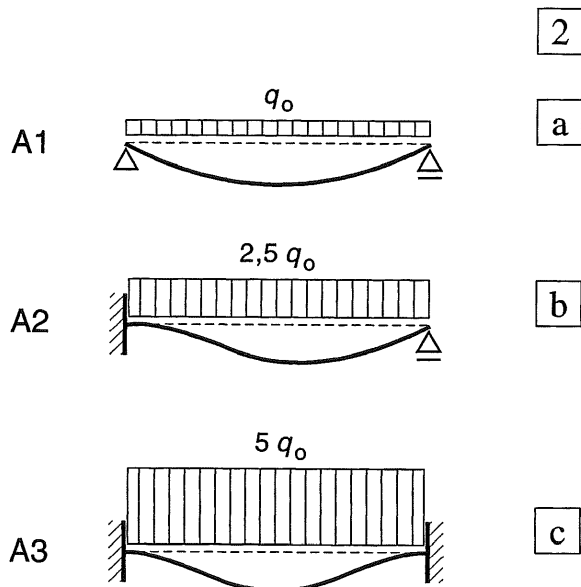


Fig. 2 Schetsen voor het doorbuigingsverloop van de liggers uit serie A

De grootte van de q -last is hierbij zodanig gekozen dat de maximale doorbuiging voor alle gevallen ongeveer even groot is

- a. Vrij opgelegde ligger
 b. Ligger aan één zijde volledig ingeklemd en aan de andere zijde vrij opgelegd
 c. Volledig ingeklemde ligger

In de onderstaande tabel is een overzicht gegeven van de grootheden, die aan het uiteinde van een ligger gelijk aan nul moeten zijn. Als we over een grootheid geen uitspraak kunnen doen is dat met een streepje aangegeven.

GEVAL		LINKS $x = 0$	RECHTS $x = l$
A1	w	0	0
	φ	—	—
	M	0	0
	V	—	—
A2	w	0	0
	φ	0	—
	M	—	0
	V	—	—
A3	w	0	0
	φ	0	0
	M	—	—
	V	—	—

Met behulp van de bovenstaande randvoorwaarden kunnen voor elk van de drie gevallen de constanten C_1 t/m C_4 worden bepaald.

Ter illustratie van de berekeningsgang is basisligger A2 nader uitgewerkt, omdat hier de meeste variatie in de randvoorwaarden optreedt.

Omdat het linkerlid van alle vergelijkingen steeds gelijk is aan nul, vallen de factoren $1/EI$ weg uit de betreffende vergelijkingen.

BASISLIGGER A2

$$q_x = +q \quad (12a)$$

$$V_x = \frac{q}{8} (5l - 8x) \quad (12b)$$

$$M_x = \frac{q}{8} (-4x^2 + 5lx - l^2) \quad (12c)$$

□ Berekening van geval A2

Uit de eerste regel van het tweede vak van de tabel volgt dat $w = 0$ voor $x = 0$ en $x = l$.

Substitutie van deze gegevens in formule [508-10e] levert de volgende twee vergelijkingen:

$$0 = C_4 \quad (a)$$

$$0 = \frac{1}{24} q l^4 - \frac{1}{6} C_1 l^3 - \frac{1}{2} C_2 l^2 + C_3 l + C_4 \quad (b)$$

Uit de tweede regel van hetzelfde vak volgt dat

$$\varphi = 0 \text{ voor } x = 0.$$

Substitutie van deze gegevens in formule [508-(10d)] levert de volgende vergelijking:

$$0 = C_3 \quad (c)$$

Uit de derde regel volgt tenslotte dat

$$M = 0 \text{ voor } x = l$$

Substitutie van deze gegevens in formule [508-(10c)] levert als vergelijking:

$$0 = -\frac{1}{2} q l^2 + C_1 l + C_2 \quad (d)$$

We hebben nu vier vergelijkingen (a), (b), (c), (d) met de vier onbekenden C_1, C_2, C_3, C_4 .

Bij de oplossing van dit stelsel zien we direct dat geldt: $C_3 = C_4 = 0$. We substitueren deze waarden in (b) en herschrijven deze uitdrukking door ze te vermenigvuldigen met 24 en te delen door l^2 . Evenzo herschrijven we (d) door vermenigvuldiging met 2. De vergelijkingen gaan dan over in:

$$0 = + q l^2 - 4 C_1 l - 12 C_2 \quad (b')$$

$$0 = - q l^2 + 2 C_1 l + 2 C_2 \quad (d')$$

Het kost dan weinig moeite om hieruit C_1 en C_2 op te lossen. Het resultaat luidt als volgt:

$$C_1 = +\frac{5}{8} q l \quad C_2 = -\frac{1}{8} q l^2 \quad C_3 = C_4 = 0$$

Substitutie van deze waarden in de vergelijkingen: [508- (10a) t/m (10e)] levert na enige omwerking de hier onderstaande formules (12):

21.3.5 DIAGRAMMEN VOOR DE DRIE BASISLIGGERS VAN SERIE A

De gevallen A1 en A3 kunnen op dezelfde wijze worden berekend als geval A2. We zullen de uitkomsten zonder meer verstrekken.

De sceptische (maar nauwgezette) lezer kan indien gewenst, aan de hand van deze uitkomsten verifiëren dat deze door herhaald differentiëren in elkaar overgaan en dat aan de juiste randvoorwaarden is voldaan.

Veel belangrijker is een beschouwing van de diagrammen voor de verschillende grootheden. Ga na hoe bij de opeenvolgende grootheden een wiskundig extremum optreedt ter plaatse van het nulpunt van de afgeleide grootheid.

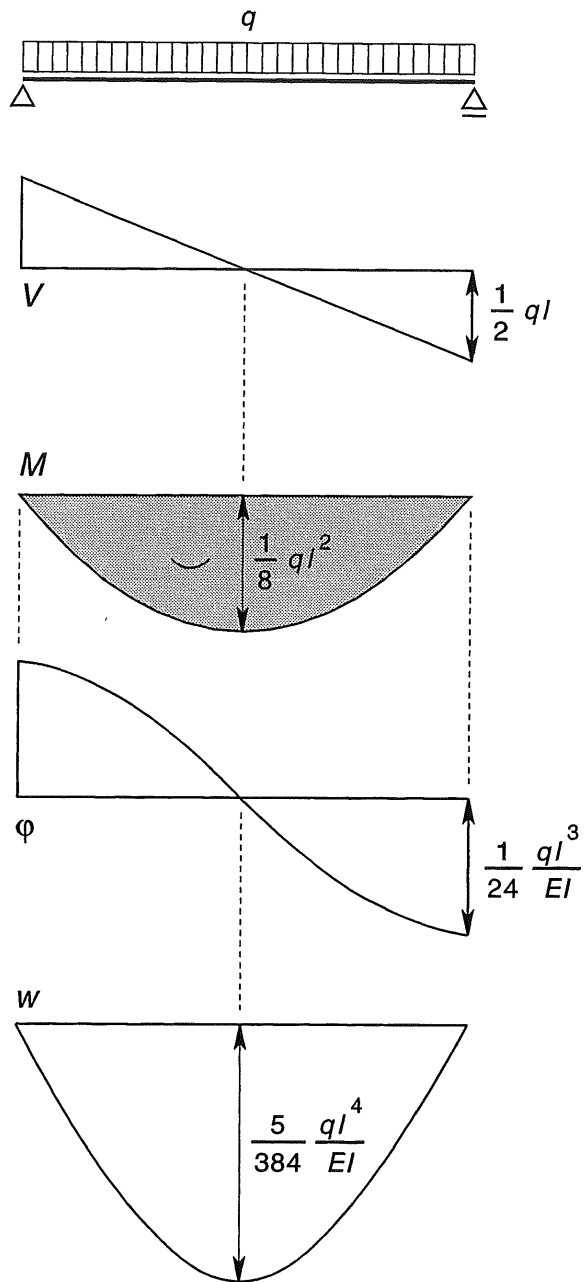
Aangezien we in de tekeningen van boven naar beneden gaande het integratie-proces volgen, staan de afgeleide grootheden dus steeds boven de beschouwde grootheid. Een en ander is door stippellijnen aangegeven.

Voor een zo gemakkelijk mogelijke substitutie van numerieke waarden voor x , zijn zoveel mogelijk factoren buiten de ronde haakjes () gebracht. Als men echter wil controleren of – beginnend vanaf de doorbuiging w – de opeenvolgende uitdrukkingen kunnen worden verkregen door doorgaand differentiëren, dan kan men de factoren x of x^2 beter eerst weer binnen de haakjes brengen.

De extreme waarden van de verschillende grootheden zijn in de figuren vermeld.

BASISLIGGER A1

$$C_1 = +\frac{1}{2} ql \quad C_3 = +\frac{1}{24} ql^3 \quad C_2 = C_4 = 0$$



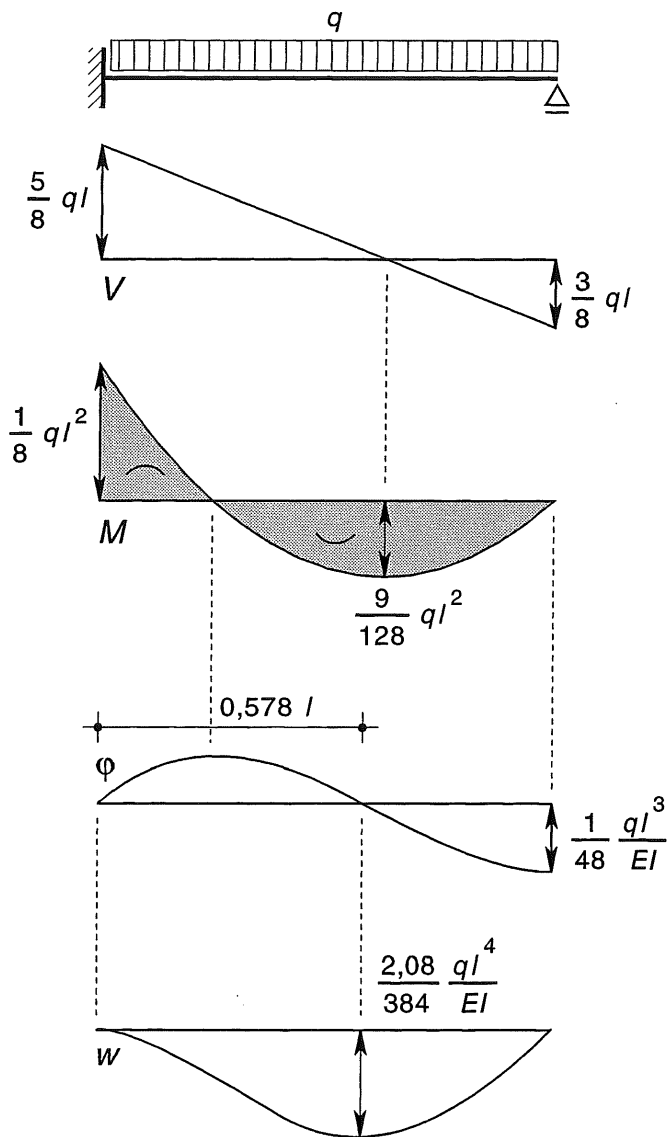
$$q_x = q \quad (11a)$$

$$V_x = \frac{q}{2} (l - 2x) \quad (11b)$$

$$M_x = \frac{qx}{2} (l - x) \quad (11c)$$

$$\varphi_x = \frac{q}{24EI} (4x^3 - 6lx^2 + l^3) \quad (11d)$$

$$w_x = \frac{qx}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3) \quad (11e)$$



BASISLIGGER A2

$$C_1 = +\frac{5}{8} ql \quad C_2 = -\frac{1}{8} ql^2 \quad C_3 = C_4 = 0$$

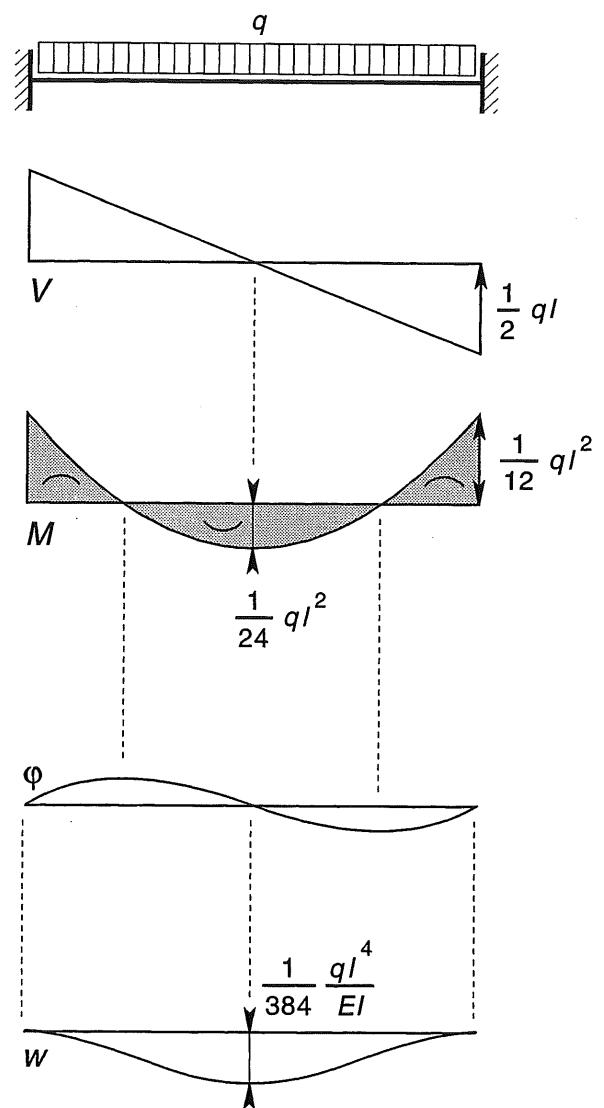
$$q_x = +q \quad (12a)$$

$$V_x = \frac{q}{8} (5l - 8x) \quad (12b)$$

$$M_x = \frac{q}{8} (-4x^2 + 5lx - l^2) \quad (12c)$$

$$\varphi_x = \frac{qx}{48EI} (8x^2 - 15lx + 6l^2) \quad (12d)$$

$$w_x = \frac{qx^2}{48EI} (2x^2 - 5lx + 3l^2) \quad (12e)$$



BASISLIGGER A3

$$C_1 = +\frac{1}{2} ql \quad C_2 = -\frac{1}{12} ql^2 \quad C_3 = C_4 = 0$$

$$q_x = +q \quad (13a)$$

$$V_x = \frac{q}{2} (l - 2x) \quad (13b)$$

$$M_x = \frac{q}{12} (-6x^2 + 6lx - l^2) \quad (13c)$$

$$\varphi_x = \frac{qx}{12EI} (2x^2 - 3lx + l^2) \quad (13d)$$

$$w_x = \frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 2lx + l^2) \quad (13e)$$

21.3.6 EENZIJDIG INGEKLEMDE LIGGERS

In het voorgaande is een drietal liggers op twee steunpunten behandeld, die gelijkmatig verdeeld zijn belast, maar verschillende randvoorwaarden bezitten.

In deze paragraaf zijn de randvoorwaarden voor de uitkragende liggers dezelfde, maar zijn er verschillende belastingen op aangebracht.

Met behulp van de uitkomsten van deze liggers kunnen dan weer een aantal andere gevallen worden opgelost.

De belastinggevallen zijn:

- B1 Een koppel op het vrije ligger-uiteinde
- B2 Een puntlast op het vrije ligger-uiteinde
- B3 Een gelijkmatig verdeelde belasting over de gehele lengte van de ligger

In principe kunnen de snedekrachten en de vervormingen weer op dezelfde wijze worden uitgerekend als hiervoor is gebeurd. Maar omdat alle liggers statisch bepaald zijn ondersteund, kunnen we de uitdrukkingen voor de dwarskracht en het buigend moment ook direct opschrijven. We behoeven dan alleen de formule voor M nog twee maal te integreren om het verloop van φ en w in een gesloten formule vast te kunnen leggen. Ter recapitulatie [507]:

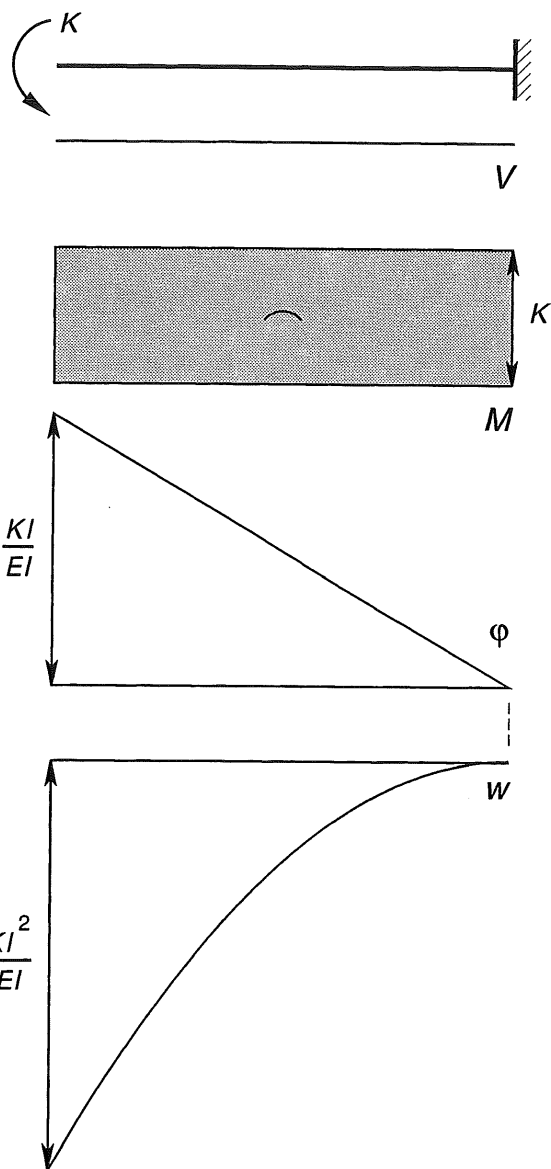
$$V_x = - \int q_x \, dx \quad (9b)$$

$$M_x = + \int V_x \, dx \quad (9c)$$

$$\varphi_x = \frac{1}{EI} \int -M_x \, dx \quad (9d)$$

$$w_x = \int +\varphi_x \, dx \quad (9e)$$

Aangezien we later veel eenvoudiger manieren zullen bespreken om deze uitkomsten te bepalen, zullen we de afleiding van de formules achterwege laten en alleen de uitkomsten verstrekken met de daarbij behorende diagrammen. Alle belastingen zijn zodanig op de liggers aangebracht dat hierin negatieve buigende momenten ontstaan. De diagrammen zijn op een zodanige schaal getekend dat de drie inklemmingsmomenten gelijk zijn.



BASISLIGGER B1

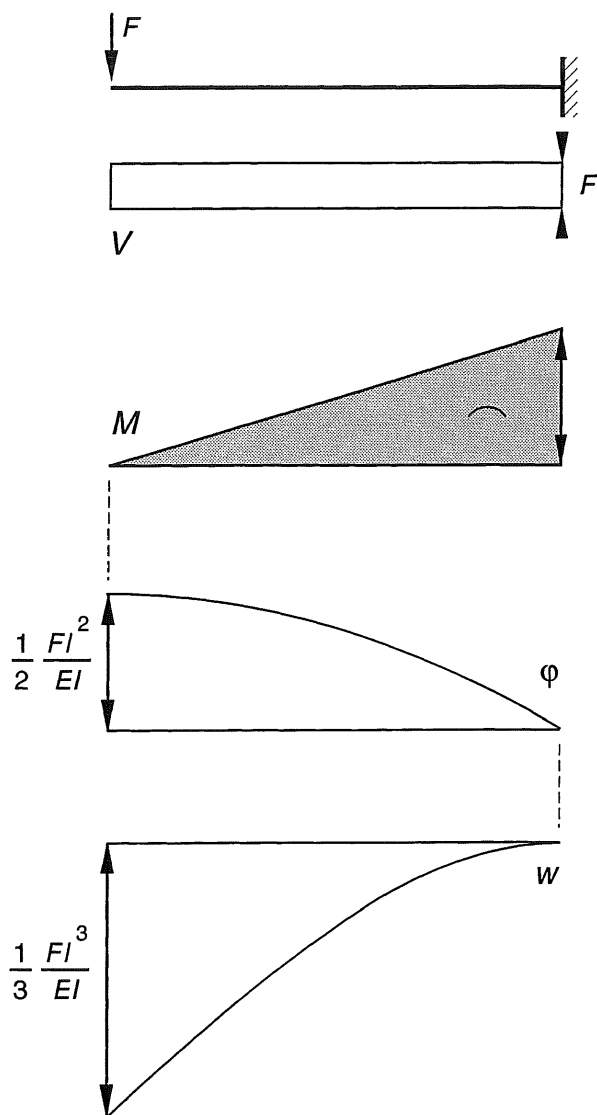
$$q_x = 0 \quad (14a)$$

$$V_x = 0 \quad (14b)$$

$$M_x = -K \quad (14c)$$

$$\varphi_x = \frac{K}{EI} (x - l) \quad (14d)$$

$$w_x = \frac{K}{2EI} (x^2 - 2lx + l^2) \quad (14e)$$



BASISLIGGER B2

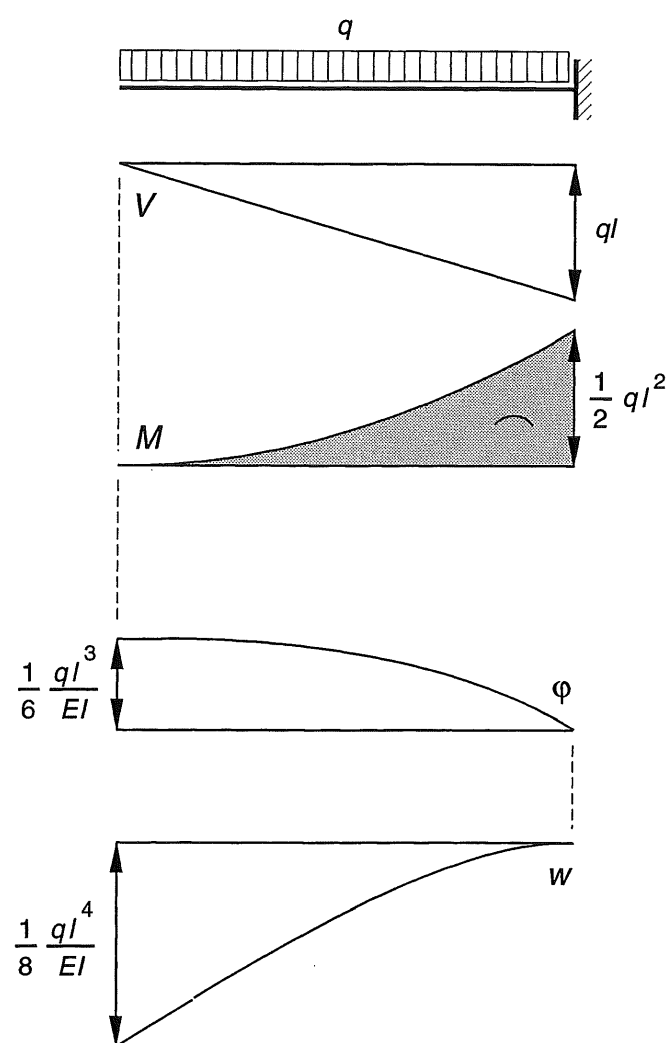
$$q_x = 0 \quad (15a)$$

$$V_x = -F \quad (15b)$$

$$M_x = -Fx \quad (15c)$$

$$\phi_x = \frac{F}{2EI} (x^2 - l^2) \quad (15d)$$

$$w_x = \frac{F}{6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \quad (15e)$$



BASISLIGGER B3

$$q_x = +q \quad (16a)$$

$$V_x = -qx \quad (16b)$$

$$M_x = -\frac{1}{2} qx^2 \quad (16c)$$

$$\phi_x = \frac{q}{6EI} (x^3 - l^3) \quad (16d)$$

$$w_x = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4l^3x + 3l^4) \quad (16e)$$

21.3.7 MAXIMALE HOEKVERDRAAIING EN ZAKKING BIJ DE EENZIJDIG INGEKLEMDE LIGGERS

De momentenlijnen en de doorbuigingslijnen voor de basisliggers B1, B2 en B3 zijn herhaald in fig. 1. De uitkraging is nu rechts van de inklemming gekozen. In dat geval is bij een negatief buigend moment zowel de hoekverdraaiing als de doorbuiging positief, zie fig. [505-3]. Bij het tekenen van de doorbuigingslijnen is dezelfde schaal aangehouden, waarbij het inklemmingsmoment voor de drie basisliggers gelijk is gekozen.

De maximale waarden van de hoekverdraaiing en de doorbuiging aan de vrije uiteinden van de liggers zijn verzameld in TABEL 7A.

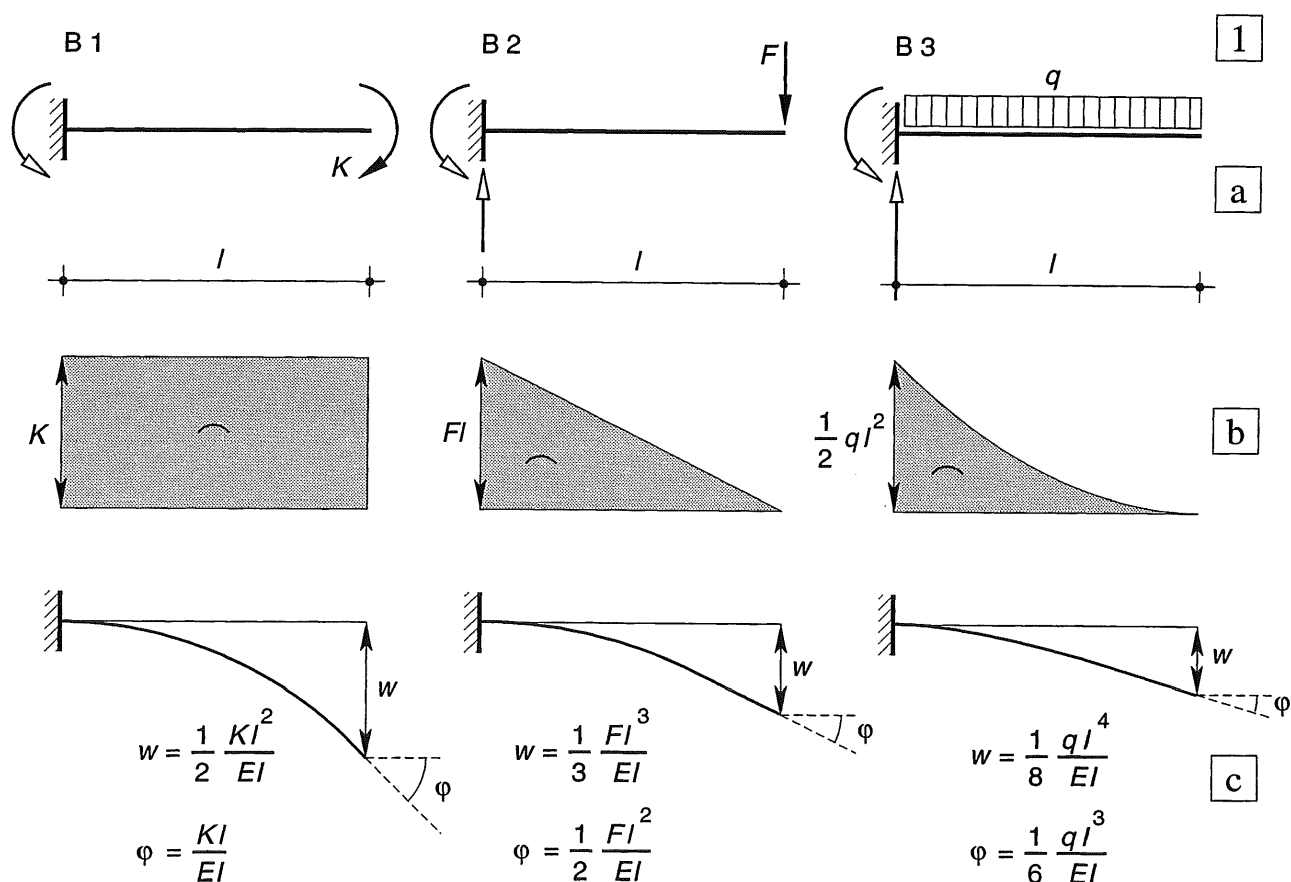
Met behulp van deze waarden kunnen voor een groot aantal andere belastinggevallen eveneens de maximale waarden van φ en w worden bepaald [520-523]. Het is dan ook nuttig om deze resultaten min of meer van buiten te kennen.

De trits formules wordt wel aangeduid als de 'vergeet-me-nietjes'. Het onthouden van de formules wordt vergemakkelijkt doordat er een zekere systematiek in de uitkomsten zit.

Dit is – wellicht ten overvloede – verduidelijkt in TABEL 7B.

Fig. 1 Extreme waarden voor de momenten en vervormingen van serie B

- Schema's
- Momentenlijnen
- Elastische lijnen (doorbuigingslijnen)



TABEL 7A
Maximale waarden van de
hoekverdraaiing en de doorbuiging

Belasting- geval	φ	w
B1	$\frac{K l}{EI}$	$\frac{K l^2}{2 EI}$
B2	$\frac{F l^2}{2 EI}$	$\frac{F l^3}{3 EI}$
B3	$\frac{q l^3}{6 EI}$	$\frac{q l^4}{8 EI}$

In algemene termen kunnen de grootheden uit tabel 7A voor de drie belastinggevallen als volgt worden geschreven :

$$B1 \quad K * \frac{l^n}{m EI} \quad (17a)$$

$$B2 \quad F * \frac{l^n}{m EI} \quad (17b)$$

$$B3 \quad q * \frac{l^n}{m EI} \quad (17c)$$

In tabel 7B zijn bij de breuken alleen de factoren n (in de teller) en m (in de noemer) weergegeven.

TABEL 7B
Factoren n en m volgens formule (17)

Belasting- geval		φ	w
B1	K	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$
B2	F	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$
B3	q	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{8}$

21.3.8 VERPLAATSINGEN VAN EEN ONBELAST VRIJ UITEINDE

Bij het superponeren kan het voorkomen dat in principe een van de gevallen B kan worden toegepast, maar dat buiten het aangrijpingspunt van de belasting aan het vrije uiteinde nog een onbelast gedeelte van de ligger aanwezig is, zie fig. 2. Het laatste deel a van de ligger blijft dan recht en de hoekverdraaiing van het vrije uiteinde is dus gelijk aan het overeenkomstige geval van TABEL 7A.

De zakking van het vrije uiteinde is dan gelijk aan de zakking volgens TABEL 7A, *vermeerderd* met de zojuist genoemde hoekverdraaiing \times de afstand a .

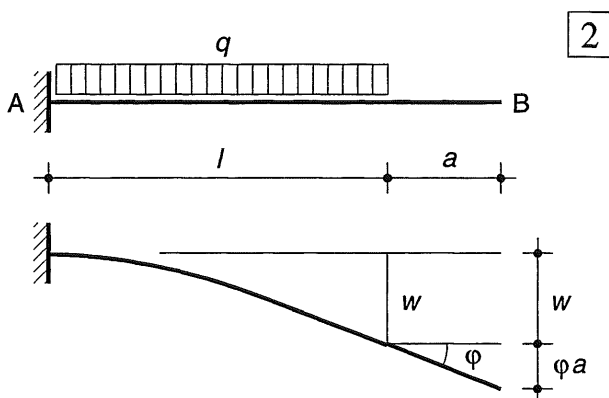


Fig. 2 Hoekverdraaiing en zakking van een onbelast uiteinde van een eenzijdig ingeklemde ligger
Voor de getekende situatie geldt dus:

$$w_B = \frac{q l^4}{8 EI} + \frac{q l^3}{6 EI} a$$

21.3.9 LIGGERS OP 2 STEUNPUNTEN UITSLUITEND BELAST DOOR RANDMOMENTEN

De laatste belangrijke groep basisliggers bestaat uit liggers op twee steunpunten, waarbij op één of op beide uiteinden uitsluitend een uitwendig koppel K aangrijpt (c.q. een randmoment M als dit koppel vanuit een aansluitend liggedeelte wordt geleverd). Op de ligger staan verder geen andere belastingen.

Hoewel dit op het eerste gezicht vrij onwaarschijnlijke belastinggevallen lijken, zal snel blijken dat we ze effectief kunnen toepassen bij statisch onbepaalde constructies, zoals doorgaande liggers en portalen, zie hoofdstuk 22 en KW-6.

Geval C1 is een vrij opgelegde ligger, die is belast door een uitwendig koppel (= moment) K aan het rechter-uiteinde. Oplegreacties, dwarskrachtenverloop en momentenverloop zijn hiernaast weergegeven.

$$V_x = -\frac{K}{l} \quad (18b)$$

$$M_x = -\frac{K}{l} x \quad (18c)$$

Vanuit (18c) kunnen we dan verder werken volgens formule [507-(9d)] en daarna volgens formule [507-(9e)]:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{1}{EI} \int -M_x dx = \frac{1}{EI} \int +\frac{K}{l} x dx = \\ &= \frac{K}{EI l} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \end{aligned} \quad (18d')$$

$$\begin{aligned} w_x &= \int +\varphi_x dx = \frac{K}{EI l} \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx \\ &= \frac{K}{EI l} \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) \end{aligned} \quad (18e')$$

Randvoorwaarden voor basisligger C1:

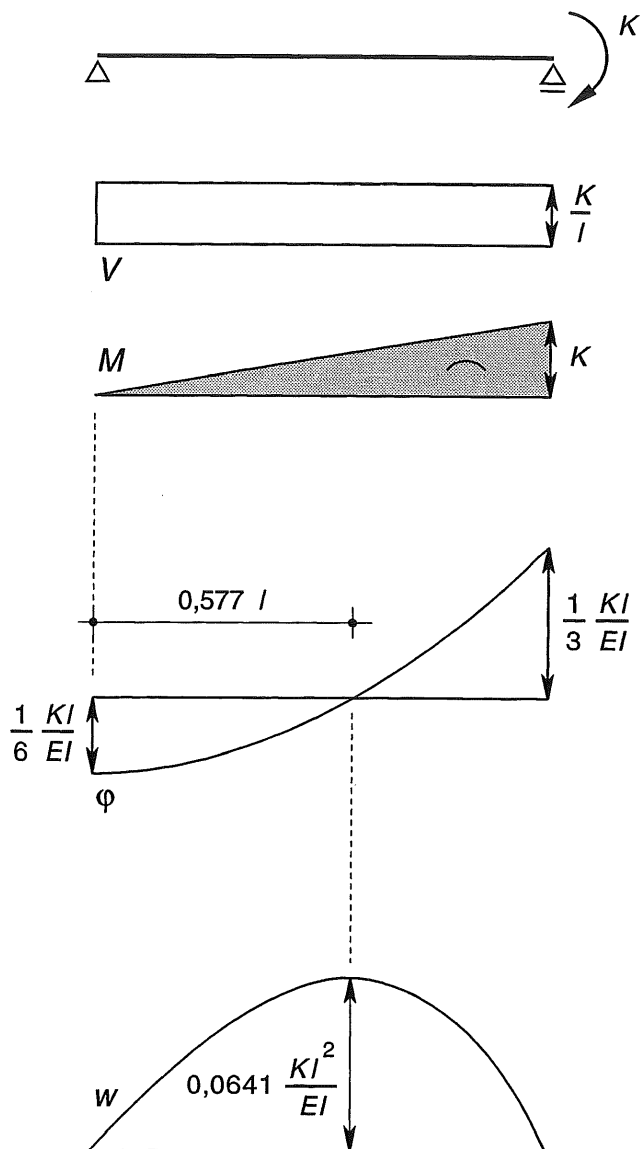
$w = 0$ voor $x = 0$ en $x = l$

Voor basisligger C2 geldt: $M_x = -K$

Basisligger C3 is statisch onbepaald zodat het uitgangspunt van de integratie alleen kan luiden: $q_x = 0$. Hieruit volgt $V_x = C_1$, waarna verder door kan worden geïntegreerd. De randvoorwaarden luiden als volgt:

Voor $x = 0$ geldt: $w = 0$ en $dw/dx = 0$

Voor $x = l$ geldt: $w = 0$ en $M = -K$



BASISLIGGER C1

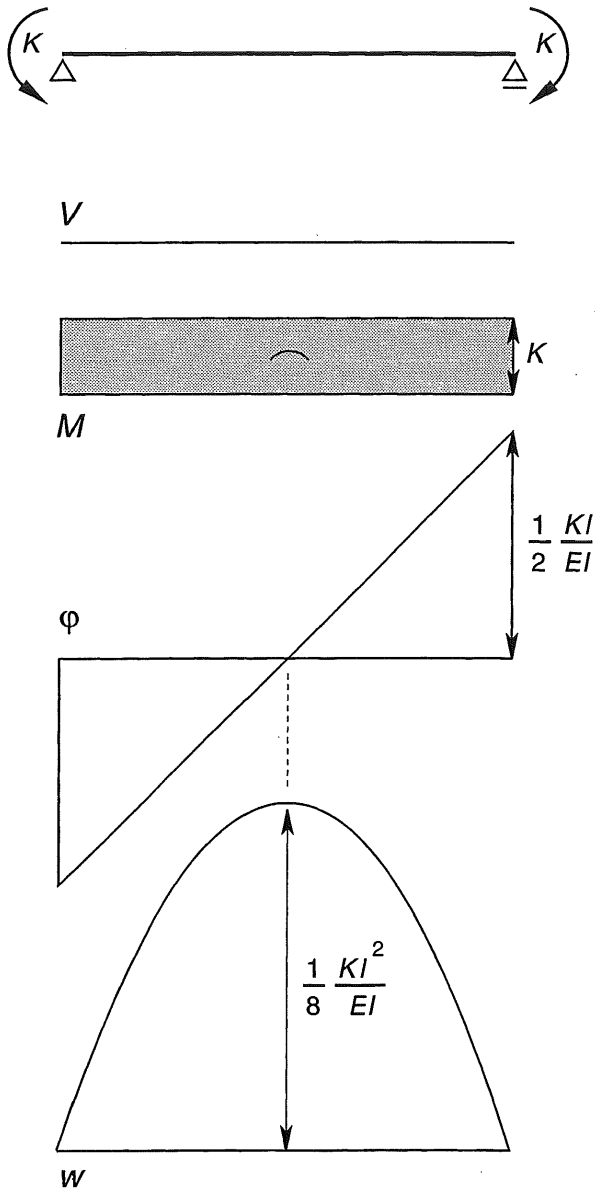
$$q_x = 0 \quad (18a)$$

$$V_x = -\frac{K}{l} \quad (18b)$$

$$M_x = -\frac{Kx}{l} \quad (18c)$$

$$\varphi_x = \frac{K}{6EI l} (3x^2 - l^2) \quad (18d)$$

$$w_x = \frac{Kx}{6EI l} (x^2 - l^2) \quad (18e)$$



BASISLIGGER C2

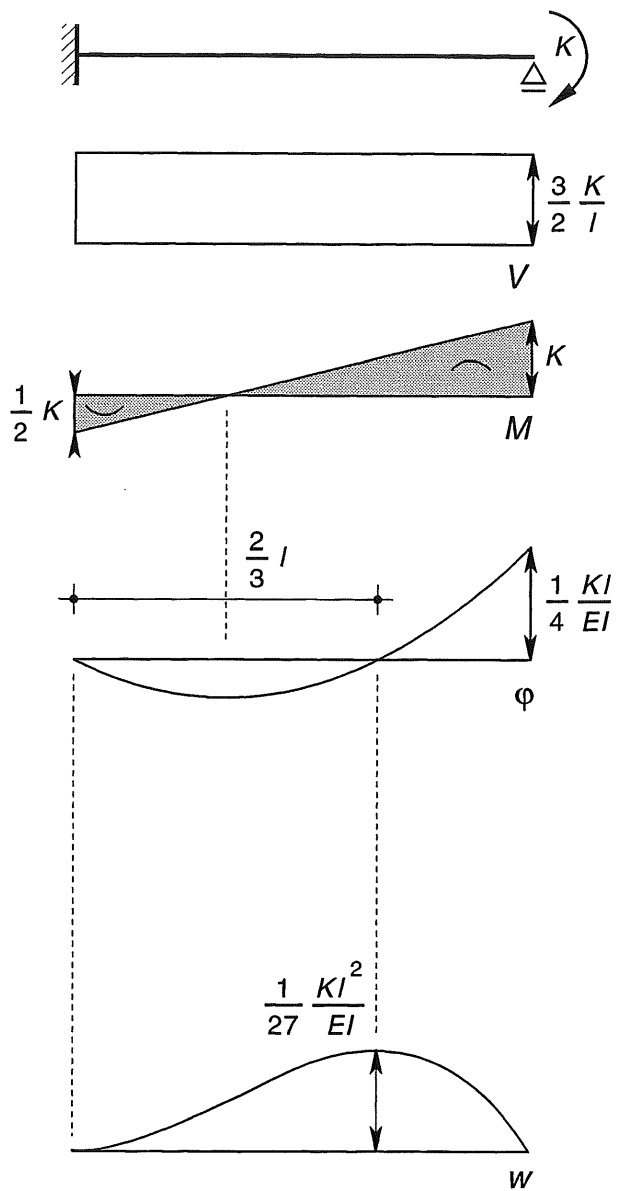
$$q_x = 0 \quad (19a)$$

$$V_x = 0 \quad (19b)$$

$$M_x = -K \quad (19c)$$

$$\varphi_x = \frac{K}{2EI} (2x - l) \quad (19d)$$

$$w_x = \frac{Kx}{2EI} (x - l) \quad (19e)$$



BASISLIGGER C3

$$q_x = 0 \quad (20a)$$

$$V_x = -\frac{3K}{2l} \quad (20b)$$

$$M_x = \frac{K}{2l} (-3x + l) \quad (20c)$$

$$\varphi_x = \frac{Kx}{4EI} (3x - 2l) \quad (20d)$$

$$w_x = \frac{Kx^2}{4EI} (x - l) \quad (20e)$$

21.4.1 GEBRUIK VAN DE VERGEET-ME-NIETJES

Met behulp van de uitkomsten van de basis-liggervormen A, B en C kunnen we nu de vervormingen berekenen van een aantal andere veel voorkomende eenvoudige belastinggevallen. Uitgangspunt voor de berekening zijn hierbij de *vergeet-me-nietjes* van serie B.

Het is eveneens mogelijk om de krachtwerking en de vervormingen van de reeds behandelde statisch *onbepaalde* liggers af te leiden uit de resultaten voor de statisch *bepaalde* grondvormen van deze liggers. We behoeven dan alleen maar dusdanige krachten c.q. momenten aan te brengen, dat aan de randvoorwaarden van het beschouwde liggerdeel is voldaan; meestal zal van een volledige inklemming sprake zijn

De hierboven beschreven methodiek kan niet worden gebruikt voor willekeurig belaste liggers. In hoofdstuk 22[568] zullen we daarom een algemene procedure behandelen waarbij de vervormingen kunnen worden bepaald van liggers met een willekeurig – maar bekend – momentenverloop.

1

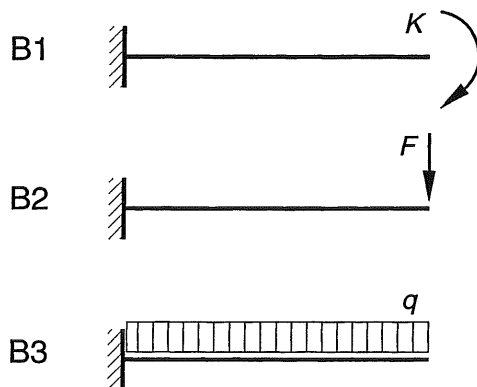


Fig. 1 Basisbelastinggevallen van serie B

21.4.2 VRIJ OPGELEGDE LIGGERS SYMMETRISCH BELAST

De maximale vervormingen van een aantal liggers op twee steunpunten, met eenvoudige symmetrische belastingen, kunnen vrij snel worden bepaald door de *vergeet-me-nietjes* uit tabel 7 toe te passen.

In de figuren 2, 3 en 4 zijn drie vrij opgelegde liggers weergegeven, die alle symmetrisch zijn belast. De oplegreacties van deze liggers zijn direct aan te geven. Ook van het doorbuigingsverloop kan zonder meer een globale schets worden gemaakt. Uit symmetrie-overwegingen moet de raaklijn in het midden van de overspanning horizontaal zijn. Dit houdt in dat we even goed de helft van de ligger kunnen beschouwen, die dan in het midden volledig is ingeklemd. Dit is eveneens in de figuren weergegeven onder b.

De berekening van φ_{\max} en w_{\max} is voor elk van de gevallen in de figuren 2, 3 en 4 weergegeven naast de betreffende figuur.

We kunnen nu gebruik maken van de *vergeet-me-nietjes* uit tabel 7A [517], die hieronder zijn herhaald in tabel 7C; de bijbehorende schema's zijn weergegeven in fig. 1. Alle vet weergegeven symbolen moeten daarbij voor het nieuwe belastinggeval (in principe) door andere passende grootheden worden vervangen.

TABEL 7C VERGEET-ME-NIETJES

Belasting geval	φ	w
B1	$\frac{K l}{EI}$	$\frac{K l^2}{2 EI}$
B2	$\frac{F l^2}{2 EI}$	$\frac{F l^3}{3 EI}$
B3	$\frac{q l^3}{6 EI}$	$\frac{q l^4}{8 EI}$

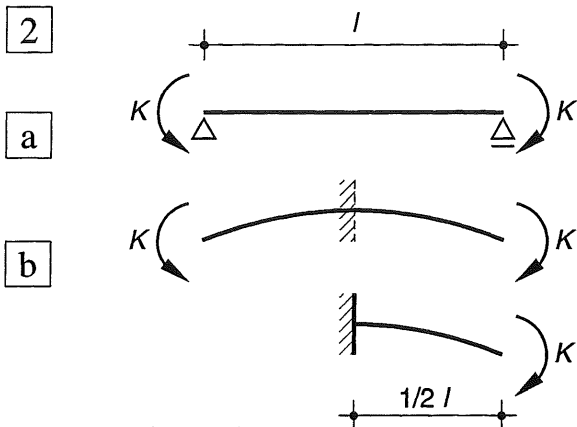


Fig. 2 Belastinggeval I
a. Oorspronkelijk schema
b. Vervanging door geval B1

I Vrij opgelegde ligger, aan beide uiteinden belast door randmomenten, zie fig. 2:

Geval B1: $K \rightarrow K$; $l \rightarrow l/2$

$$\varphi_{\max} = \frac{K \frac{l}{2}}{EI} = \frac{Kl}{2EI} \quad (27)$$

$$w_{\max} = \frac{K \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} = \frac{Kl^2}{8EI} \quad (28)$$

Vergelijk de formules [519-(19d) en (19e)] resp. voor $x = 0$ en $x = l/2$.

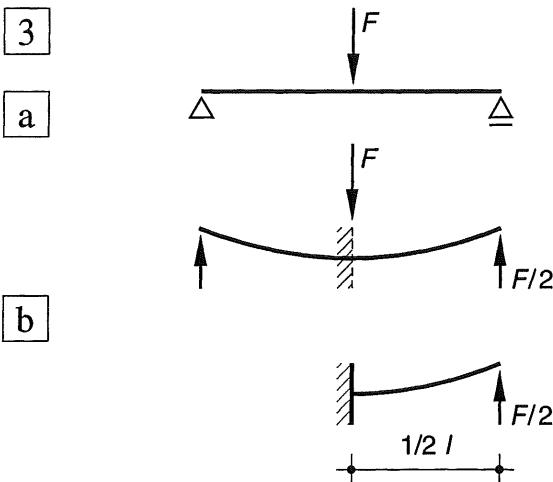


Fig. 3 Belastinggeval II
a. Oorspronkelijk schema
b. Vervanging door belastinggeval B2

II Vrij opgelegde ligger, belast door een puntlast in het veldmidden, zie fig. 3.

Geval B5: $F \rightarrow F/2$; $l \rightarrow l/2$

$$\varphi_{\max} = \frac{\frac{F}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} = \frac{Fl^2}{16EI} \quad (29)$$

$$w_{\max} = \frac{\frac{F}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{48EI} \quad (30)$$

III Vrij opgelegde ligger, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting, zie fig. 4.

Superpositie van de gevallen B2 en B3; de invloed van de puntlast overheerst.

$q \rightarrow q$; $F \rightarrow ql/2$; $l \rightarrow l/2$

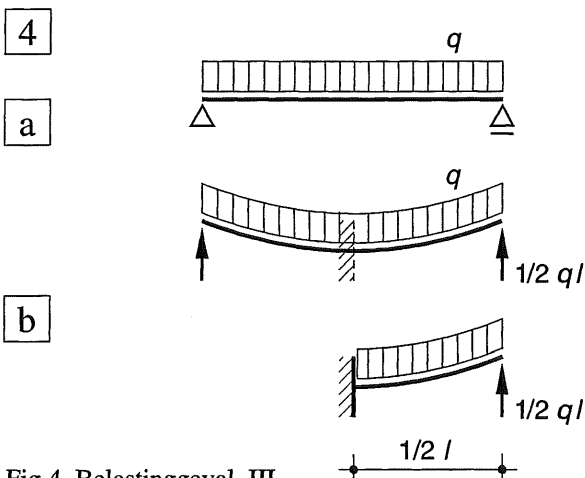


Fig. 4 Belastinggeval III
a. Oorspronkelijk schema
b. Vervanging door belastinggeval B2 + B3

$$\begin{aligned} \varphi_{\max} &= \frac{\frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} - \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6EI} = \\ &= \frac{ql^3}{16EI} - \frac{ql^3}{48EI} = \frac{ql^3}{24EI} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{\frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI} = \\ &= \frac{ql^4}{48EI} - \frac{ql^4}{128EI} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \end{aligned} \quad (32)$$

Vergelijk de formules [512-(11d) en (11e)] resp. voor $x = l$ en $x = l/2$.

21.4.3 VRIJ OPGELEGDE LIGGER MET ASYMMETRISCHE PUNTLAST

Met enige goede wil kunnen met behulp van de vergeet-me-nietjes ook iets ingewikkelder gevallen worden behandeld. Als voorbeeld is gekozen voor een vrij opgelegde ligger, die wordt belast door een willekeurig geplaatste puntlast, zie fig. 1a. In dit geval zal de helling onder de puntlast niet gelijk zijn aan nul, zoals in fig. [521-3], zie fig. 1b. Maar omdat de ligger statisch bepaald is opgelegd, zijn de oplegreacties bekend. Voor de berekening beschouwen we de ligger daarom wél ingeklemd ter plaatse van de puntlast. Toepassing van de formules [520-(23) en (24)] levert dan voor beide ligger-uiteinden zowel de hoekverdraaiingen als de verticale verplaatsingen, die in dit geval ongelijk groot zullen zijn, zoals blijkt uit fig. 1c.

Uiteraard is ook het preciese verloop van beide grootheden te bepalen door gebruik te maken van de basisformules [515-(15d) en (15e)].

Als we nu de ligger zodanig roteren dat beide opleggingen weer op gelijke hoogte komen te liggen, dan is de oplossing gevonden.

Voor de doorbuiging ter plaatse van de puntlast is een relatief eenvoudige formule op te stellen, die rechtstreeks volgt uit de doorbuigingen van de punten A' en B' van fig. 1c. De grootte van de maximale doorbuiging is eveneens redelijk af te schatten uit fig. 1c. De doorbuiging ter plaatse van de puntlast wijkt hier niet veel van af, zodat we zonder veel bezwaar formule (33) ook voor de maximale doorbuiging kunnen aanhouden.

Uitwerking

De liggerdelen OA en OB worden beide in O ingeklemd gedacht. Voor de linkertak volgen de hoekverdraaiing en de doorbuiging door in (23) en (24) te substitueren:

$$F \rightarrow Fb/l; \quad l \rightarrow a$$

Voor punt A volgen onderstaande uitkomsten (links) voor punt B worden a en b verwisseld (rechts).

$$\varphi'_A = \frac{b}{l} \frac{F a^2}{2EI} = \frac{F a^2 b}{2EI l} \quad \varphi'_B = \frac{F a b^2}{2EI l}$$

$$w'_A = \frac{b}{l} \frac{F a^3}{3EI} = \frac{F a^3 b}{3EI l} \quad w'_B = \frac{F a b^3}{3EI l}$$

De verbindingslijn A'-B' vormt dan de (scheve) nullijn voor de zakkingen, zie fig. 1c. De zakking ter plaatse van de puntlast F is dan gelijk aan, zie fig. 1c:

$$w_0 = w'_A + \frac{a}{l} (w'_B - w'_A)$$

Substitutie van de desbetreffende waarden levert:

$$w_0 = \frac{F a b}{3EI l} \left[a^2 + \frac{a}{l} (b^2 - a^2) \right] = \frac{F a^2 b^2}{3EI l} \quad (33)$$

Ter wille van de volledigheid zijn ook de werkelijke hoekverdraaiingen in A en B bepaald. Ze volgen uit, zie fig. 1c:

$$\varphi_A = \varphi'_A + \frac{w'_B - w'_A}{l} \quad \varphi_B = \varphi'_B - \frac{w'_B - w'_A}{l}$$

Verdere uitwerking levert:

$$\varphi_A = \frac{F a^2 b}{2EI l} + \frac{F a b}{3EI l} (b - a) = \frac{F a b}{6EI l} (3a + 2b - 2a)$$

$$\varphi_B = \frac{a b}{6EI} \frac{l + b}{l} F \quad (34a)$$

De hoekverdraaiing in punt B volgt weer door a en b in formule (34a) te verwisselen. Vergelijk ook [570-571]

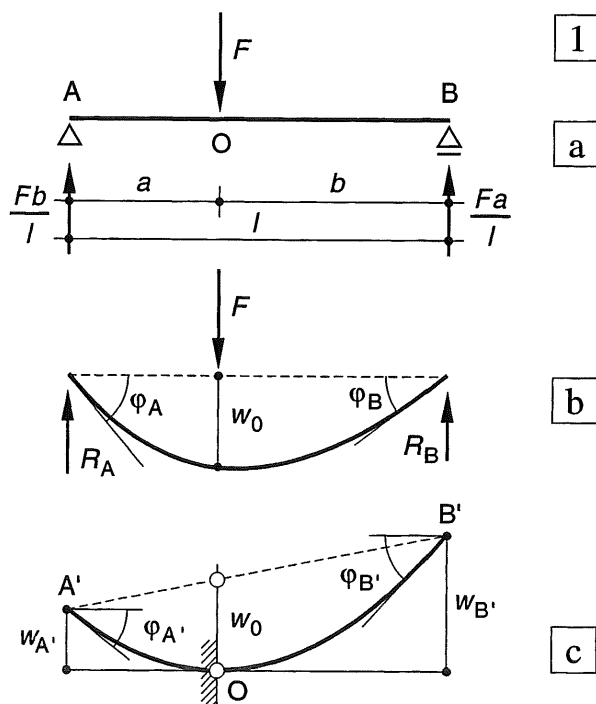


Fig. 1 Doorbuiging van een vrij opgelegde ligger, belast door een puntlast

- a. Schema
- b. Doorbuigingslijn
- c. Ligger ter plaatse van O ingeklemd gedacht

21.4.4 VRIJ OPGELEGDE LIGGER MET SYMMETRISCHE OVERSTEKKEN

Door het aanbrengen van overstekken, kunnen de doorbuigingen van vrij opgelegde liggers sterk worden beperkt. Tegelijkertijd kunnen de doorbuigingen van de vrije uiteinden sterk toenemen. Het is dan ook zaak een juist evenwicht te vinden tussen de lengte van het liggerdeel tussen de opleggingen en de lengte van de overstekken. We beperken ons hierbij tot een symmetrische ligger die alleen wordt belast door een gelijkmatig verdeelde belasting.

Het schema van de ligger is weergegeven in fig. 2a. We splitsen de ligger daartoe in de volgende onderdelen, zie fig. 2b, zie zonedig KW-2 [282].

Geval A1 : een vrij opgelegde ligger met lengte l

Geval C2 : een onbelaste ligger met lengte l , belast door randmomenten van bekende grootte

Geval B3 : 2 eenzijdig ingeklemde liggers met lengte a

Het randmoment voor geval C2 is hierbij gelijk aan het inklemmingsmoment van geval B3: $K = 1/2 qa^2$

De oplegreactie voor geval B3 vloeit direct af naar de ondersteuning. Dit houdt in dat de ligger AB op twee steunpunten alleen wordt belast door een gelijkmatig verdeelde belasting q en twee randmomenten K .

De zakking in punt M en de hoekverdraaiing in punt B kunnen dan worden bepaald als de algebraïsche optelling van de afzonderlijke gevallen A1 en C2. Als de hoekverdraaiing in punt B bekend is, dan is ook de verticale verplaatsing van het onbelaste overstek bekend. Ten opzichte van dit punt moet dan de zakking van punt C voor geval B3 worden uitgezet. Verticale verplaatsingen omlaag en rechtsdraaiende rotaties zijn als positief ingevoerd, zodat alle uitkomsten algebraïsch kunnen worden opgeteld.

Zakking en hoekverdraaiing voor de gevallen A1 en C2

$$w_{M1} = \frac{+5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad \varphi_{B1} = \frac{-1}{24} \frac{ql^3}{EI}$$

$$w_{M2} = -\frac{1}{8} \frac{Kl^2}{EI} = -\frac{qa^2l^2}{16EI} \quad \varphi_{B2} = +\frac{1}{2} \frac{Kl}{EI} = +\frac{qa^2l}{4EI}$$

Optellen van deze uitdrukkingen levert :

$$w_M = \frac{ql^2}{384EI} (5l^2 - 24a^2) \quad \varphi_B = \frac{ql}{24EI} (-l^2 + 6a^2)$$

De zakking van punt C is dan de sommatie van de rotatie $\varphi_B \times$ de afstand a [517] plus de zakking van de volledig ingeklemde ligger van geval B3:

$$w_C = \varphi_B * a + \frac{qa^4}{8EI} = \frac{+q}{24EI} (-al^3 + 6a^3l + 3a^4)$$

De zakkingen van het veldmidden M en het vrije uiteinde C van het overstek zijn in fig. 3 uitgezet als functie van de verhouding a/l .

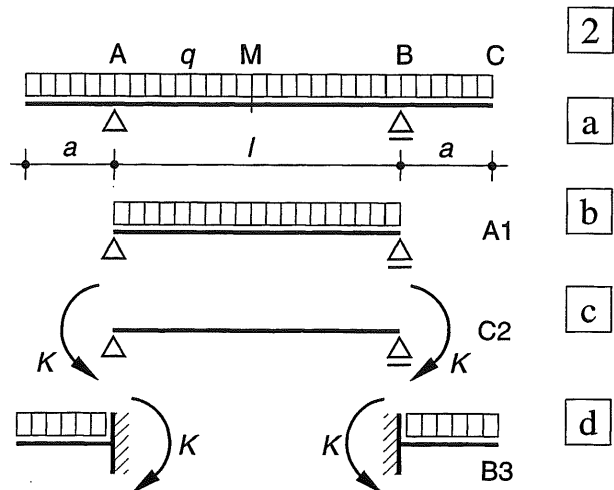


Fig. 2 Vrij opgelegde ligger met gelijke overstekken onder gelijkmatig verdeelde belasting
a. Schema wordt gesplitst in de gevallen:
b. c. A1; C2;
d. B3 (+ verplaatsing door rotatie van de punten A en B)

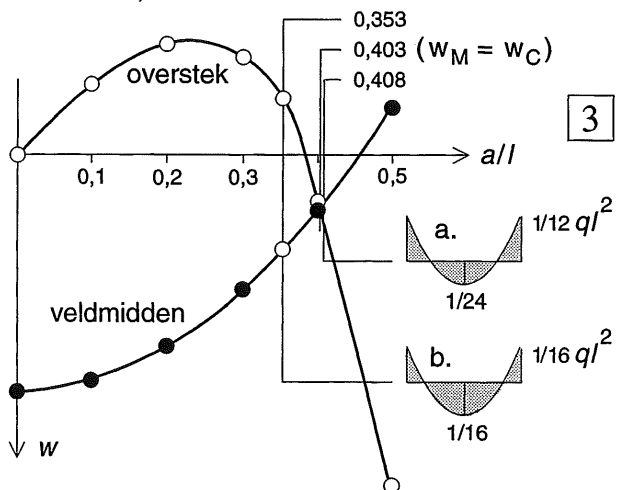


Fig. 3 Verplaatsing van de punten M en C als functie van de verhouding tussen het overstek en de overspanning

De momentenlijntjes geven twee speciale gevallen weer voor ligger AB:

- een volledige inklemming
- gelijk veld- en inklemmingsmoment

21.4.5 CONTROLE STATISCH ONBEPAAALDE LIGGERS

Bij de integratie van de belasting zijn ook drie statisch onbepaalde liggers aan de orde gekomen: A2, A3 en C3, zie fig. 1.

De basisliggers A2 en A3 kunnen ook rechtstreeks worden afgeleid uit A1 als we gebruik maken van de gevallen C1 en C2, zie fig. 1a. De basisligger C3 volgt uit C1, zie fig. 1b.

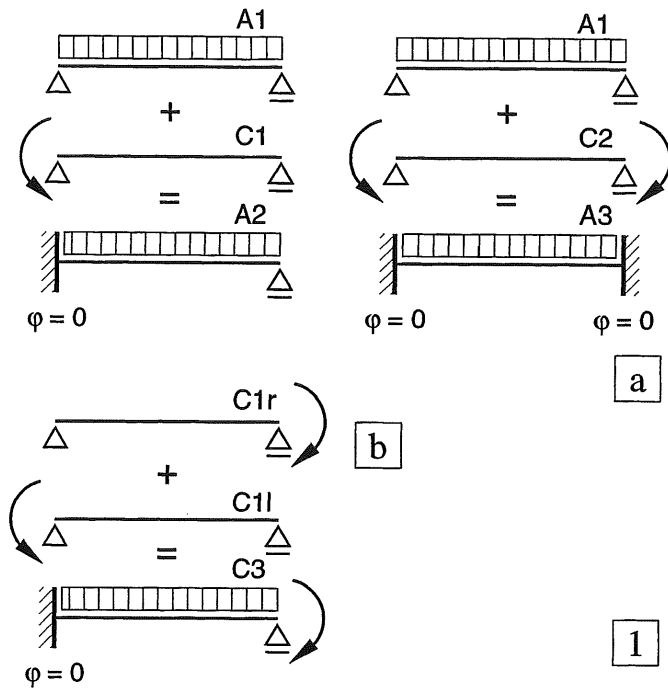


Fig. 1 Statisch onbepaalde ligger berekend met behulp van twee basisbelastinggevallen
 a. Bepaling van de gevallen A2 en A3
 b. Bepaling van geval C3

Berekening geval A2 zie fig. 2

De grootheden φ_{\max} en w_{\max} voor een vrij opgelegde ligger zijn berekend in [521- (31)- (32)] en in [512]. Om geval A2 te vinden moeten we de maximale hoekverdraaiing aan het linker-uiteinde van de ligger tot nul terugbrengen. Het hiervoor benodigde uitwendige moment K volgt dan uit formule [518-(18d)] voor basisligger C1.

Vrij opgelegde ligger, zie fig. 2a:

$$\varphi_{\max} = q l^3 / 24 EI \quad (31)$$

Ligger met randmoment, zie fig. 2b:

$$\varphi_{\max} = K l / 3 EI \quad (18d')$$

Om de hoekverdraaiing in punt A op te heffen moeten de formules (31) en (18d') aan elkaar gelijk worden gesteld.

$$K l / 3 EI = q l^3 / 24 EI$$

$$K = q l^2 / 8$$

Dit randmoment veroorzaakt een negatief buigend moment; de momentenlijn kan direct als de superpositie van twee belastinggevallen worden getekend, zie fig. 2d.

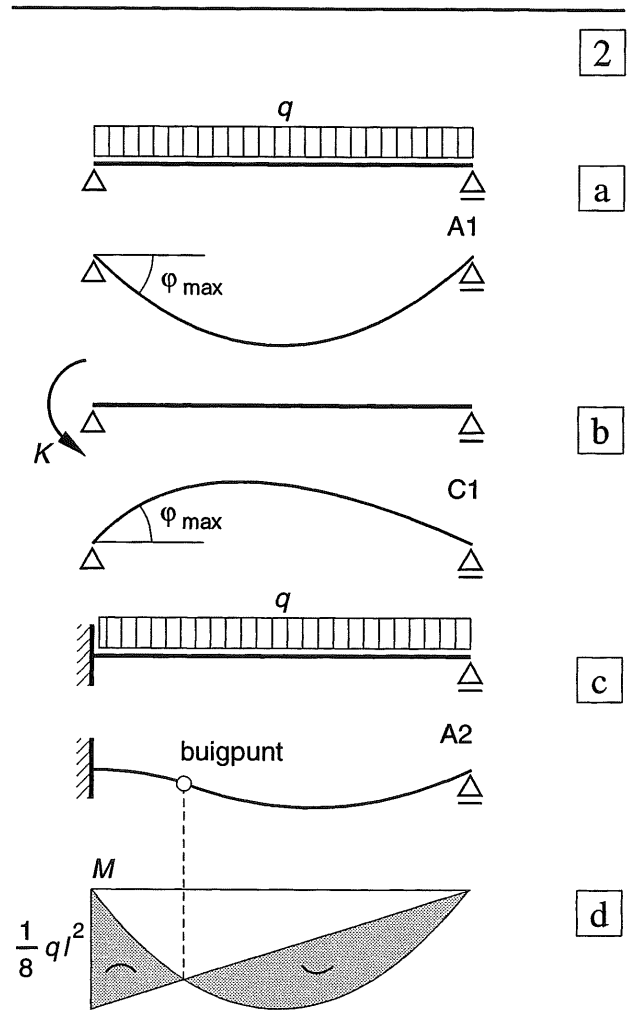


Fig. 2 Berekening van geval A2, zie fig. 2c
 Links: volledige inklemming
 Rechts: vrije opgelegging
 a. Schema + elastische lijn voor geval A1
 b. Schema + elastische lijn voor geval C1
 c. Schema + elastische lijn na superpositie = geval A2
 d. Momentenlijn voor geval A2

Berekening geval A3 zie fig. 3

Dezelfde hoekverdraaiing moet nu aan beide zijden worden opgeheven, zie fig. 3. Er moeten daarom gelijke koppels op beide ligger-uiteinden worden aangebracht, zoals in geval C2. Uit formule [519-(19d)] volgt dan:

$$\varphi_{\max} = Kl/2EI \quad (19d')$$

Gelijkstelling aan (31) levert:

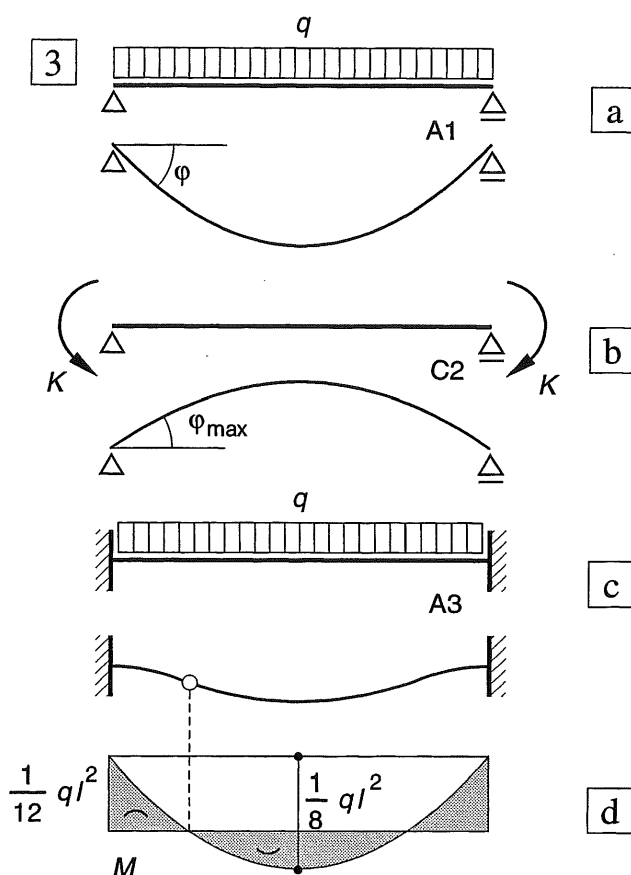
$$Kl/2EI = ql^3/24EI$$

$$K = ql^2/12$$

De momentenlijn is weer door superpositie te bepalen.

Fig. 3 Berekening van geval A3 (zie fig. 3c):

- links en rechts een volledige inklemming
- Schema + elastische lijn voor geval A1
 - Schema + elastische lijn voor geval C2
 - Schema + elastische lijn na superpositie = geval A3
 - Momentenlijn voor geval A3



Berekening geval C3 zie fig. 4

Geval C3 volgt uit geval C1 door te zorgen dat de hoekverdraaiing aan het linker-uiteinde door een randkoppel wordt opgeheven.

De hoekverdraaiing aan het linker-uiteinde volgt uit formule [518-(18d)] voor $x = 0$:

$$\varphi = -Kl/6EI \quad (18d'')$$

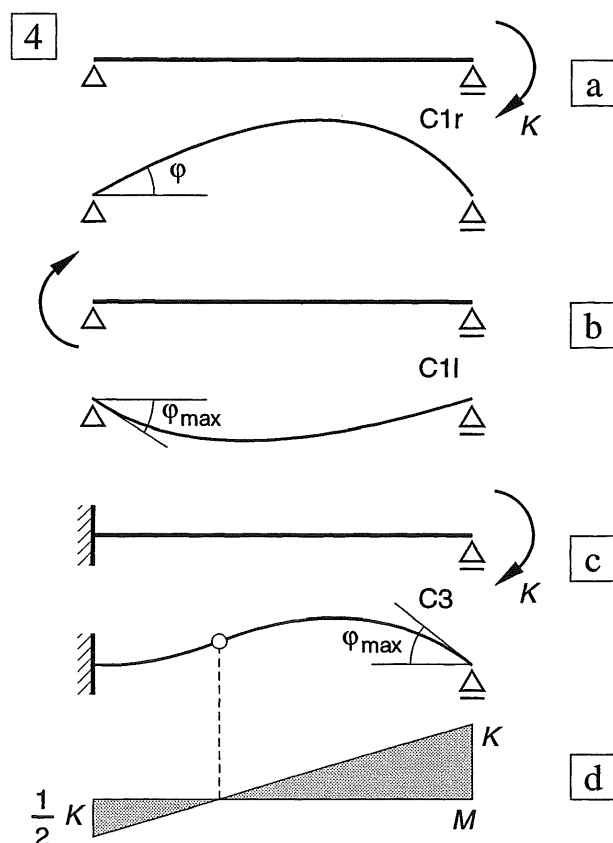
Het randkoppel veroorzaakt ter plaatse van het aangrijpingspunt een hoekverdraaiing die volgt uit formule (18d) voor $x = l$:

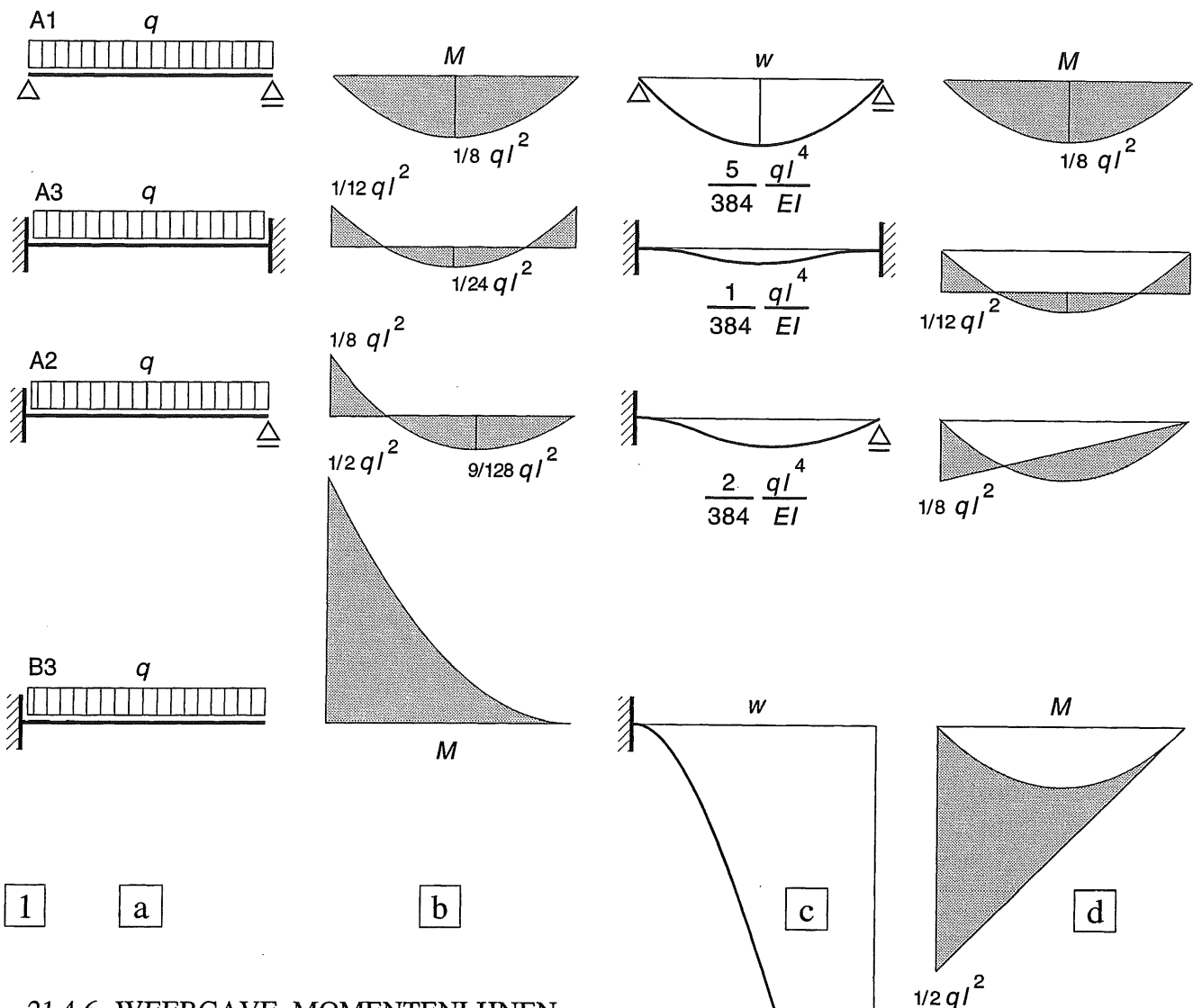
$$\varphi_{\max} = Kl/3EI \quad (18d''')$$

Er is dus een koppel ter grootte $K/2$ nodig om de hoekverdraaiing bij A op te heffen. Uit de figuur volgt dat beide koppels dezelfde draairichting moeten hebben, zodat ze als buigend moment een tegengesteld teken bezitten.

Fig. 4 Berekening van geval C3:

- links een volledige inklemming
rechts een vrije oplegging met randmoment
- Schema + elastische lijn voor geval C1 (moment rechts)
 - Schema + elastische lijn voor geval C1 (moment links)
 - Schema + elastische lijn na superpositie = geval C3
 - Momentenlijn voor geval C3





$$\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI} = \frac{48}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

21.4.6 WEERGAVE MOMENTENLIJNEN

Het momentenverloop voor elke ligger – of elk liggerdeel – onder een gelijkmatig verdeelde belasting, volgt uit het momentenverloop voor een vrij opgelegde ligger door hierop de juiste randmomenten te superponeren. Dit kan op een aantal manieren gebeuren, zoals reeds in KW-2 is besproken [271; 281; 283; 284-286].

Daar moesten we ons echter beperken tot statisch bepaalde liggers met of zonder overstek.

In het vervolg zullen we voornamelijk de wijze van superponeren toepassen, zoals die voor het eerst is gebruikt in KW-2 [285], en in de voorbeelden van [524-525] is herhaald.

In fig. 1b is voor de basisliggers A1, A2, A3 en B3 het moment op de traditionele manier uitgezet, dus met een horizontale nullijn.

Fig. 1 Basisliggers belast door een gelijkmatig verdeelde belasting
 a. Schema van de liggers
 b. Momentenverloop traditioneel uitgezet
 c. Doorbuigingslijnen
 d. Momentenverloop bepaald door superpositie, uitgaande van de vrij opgelegde ligger

Superpositie randmomenten

In fig. 1d daarentegen is uitgegaan van het momentenverloop voor een ligger op twee steunpunten, waarop de juiste randmomenten zijn gsuperponeerd.

Voor basisligger B3 moeten we daartoe aan de rechterzijde geen *moment* aanbrengen, maar moeten we de *verticale oplegreactie* ter grootte $R_B = 1/2 ql$ elimineren.

De daartoe benodigde neerwaarts gerichte kracht veroorzaakt in A dan een negatief buigend moment ter grootte: $M_A = -1/2 ql^2$.

Om nog eens duidelijk te laten zien welke grote invloed de randvoorwaarden op de doorbuiging hebben, zijn in fig. 1c de doorbuigingen van de basisliggers weergegeven, zoals die zullen optreden bij dezelfde q, l en EI . Hieruit blijkt wel hoe voorzichtig we moeten zijn met grote uitkragende liggers (volledige inklemming) of grote overstekken (verende inklemming) [523].

We roepen in herinnering dat in KW-2 [273] een vrij opgelegde ligger A-B-C met een overstek A-B is besproken (lengte overstek = $1/2 l$).

Het overstek veroorzaakt daar een inklemmingsmoment $M_B = 1/2 q (l/2)^2 = 1/8 ql^2$.

Dit effect is hetzelfde als dat van een volledige inklemming in B; er geldt dus ook bij het overstek: $\varphi_B = 0$.

21.4.7 MOMENTENSOM

Bij doorgaande liggers zullen we vaak de wijze van superponeren toepassen, zoals is weergegeven in fig. 1d. Afhankelijk van de afmetingen en de belasting van de opeenvolgende liggerdelen, zal ook de grootte van de randmomenten per liggerdeel kunnen variëren.

In fig. 2 is het momentenverloop van één liggerdeel tussen twee steunpunten weergegeven, dat wil zeggen: een parabolisch momentenverloop met daarop gesuperponeerd de randmomenten $M_{\text{neg}1}$ en $M_{\text{neg}2}$.

Bij een dergelijk liggerdeel definiëren we het begrip *Momentensom* M_0 als volgt:

$$M_0 = M_{\text{pos}} + \frac{1}{2} | M_{\text{neg}1} + M_{\text{neg}2} | = \frac{1}{8} q l^2 \quad (35)$$

Deze uitdrukking geeft in zijn algemeenheid alleen maar weer dat de pijl van de parabool gelijk blijft aan $M_0 = 1/8 ql^2$.

Bij statisch onbepaalde constructies zal blijken dat het niet zo belangrijk is dat we de positieve en negatieve momenten elk afzonderlijk precies kennen, zolang we de som van de absolute waarden van de momenten maar correct aannemen. *Deze stelling verliest echter alle betekenis, zodra alléén maar negatieve momenten optreden.* In zo'n geval kan het maximale negatieve moment immers veel groter zijn dan de momentensom, zie fig. 1d: belastinggeval B-3.

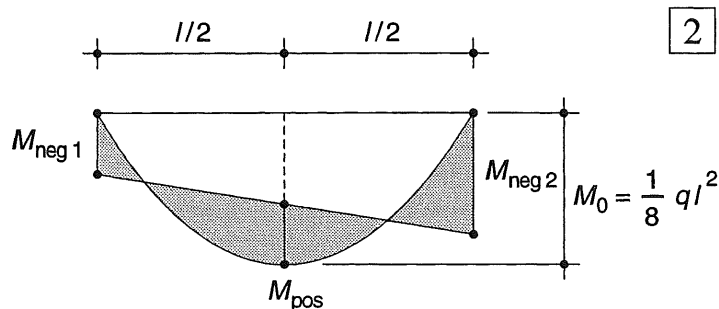


Fig. 2 Het begrip momentensom

22 BEREKENING VAN DOORGAANDE LIGGERS EN PORTALEN

Toepassing van vormveranderingsvergelijkingen voor statisch onbepaalde constructies van eenvoudige aard

22.1 INLEIDING

22.1.1 BEREKENING VAN STATISCH BEPAALDE CONSTRUCTIES

Men spreekt van een *statisch bepaalde* constructie, als de gehele krachtwerving kan worden bepaald met behulp van evenwichts-beschouwingen. Uiteraard zal de constructie vervormen onder invloed van de uitwendige krachten, maar deze vervormingen hebben geen rechtstreekse invloed op het krachtenspel.

De doorsnede-afmetingen (van de meestal lijnvormige onderdelen) kunnen rechtstreeks worden gebaseerd op een voldoende sterkte. Achteraf kan worden gecontroleerd of de vervormingen plaatselijk niet te groot worden. De afmetingen kunnen dan alsnog worden aangepast, waarbij de snedekrachten – N , V , M – zich hoegenaamd niet zullen wijzigen (de kleine invloed van een wat groter eigen gewicht is hierbij buiten beschouwing gelaten). Statisch bepaalde constructies zijn qua krachtwerving weinig gevoelig voor de zakking van een steunpunt; de optredende scheefstand zou wèl hinderlijk kunnen zijn.

Zoals in hoofdstuk 21 is afgeleid, zijn de buigvervormingen van lijnvormige onderdelen altijd recht evenredig met de grootte van de belasting en omgekeerd evenredig met de buigstijfheid.

Evenzo zijn de rekvervormingen evenredig met de belasting en omgekeerd evenredig met de rekstijfheid. In de meeste elementaire berekeningen van lijnvormige onderdelen wordt de invloed van de rekstijfheid EA verwaarloosd ten opzichte van de buigstijfheid EI . Bij computerberekeningen daarentegen kunnen beide invloeden gemakkelijk worden verdisconteerd, zodat kleine afwijkingen zullen optreden ten opzichte van de uitkomsten van handberekeningen.

Bij de behandeling van vakwerken daarentegen in KW-3, is de invloed van de buigstijfheid van de staven – min of meer stilzwijgend – verwaarloosd ten opzichte van de rekstijfheid. Daardoor kunnen de meeste vakwerken als statisch bepaalde constructies worden berekend.

22.1.2 BEREKENING VAN STATISCH ONBEPAAALDE CONSTRUCTIES

Bij *statisch onbepaalde* constructies blijken de drie evenwichtsvergelijkingen voor een vlakke constructie en de zes vergelijkingen voor een ruimtelijke constructie uit KW-0 [034-036] niet voldoende om de gehele krachtswerking te kunnen analyseren. Het blijkt dan nodig om ook de vervormingen in de berekening te betrekken.

We spreken van een *uitwendig* statisch onbepaalde constructie als we – voor een constructie in het platte vlak – meer dan drie onbekende oplegreactie-componenten hebben. De constructie wordt *inwendig* statisch onbepaald genoemd, als de oplegreacties wèl met behulp van het evenwicht kunnen worden bepaald, maar de krachtswerking in de constructie zèlf niet, althans niet in de gehele constructie. Dit laatste geval kan bijv. optreden bij een Vierendeel-lijger of een eenbeukig raamwerk, beide ondersteund door een rol en een scharnier.

Ook bij een statisch onbepaalde constructie is de vervorming van elk onderdeel weer recht evenredig met de belasting maar nu spelen de stijfheidsverhoudingen tussen de diverse onderdelen een grote rol in het krachtenspel. Zolang alle stijfheidsverhoudingen ongewijzigd blijven, zal ook de krachtswerking zich niet wijzigen.

22.1.3 BEREKENINGS-METHODEN

In hoofdlijnen kunnen twee berekeningsmethoden worden onderscheiden:

- 1 de krachtenmethode
- 2 de verplaatsingsmethode

Bij de krachtenmethode wordt de constructie in statisch bepaalde onderdelen verdeeld, waarin krachten en momenten in de uiteinden van deze onderdelen als onbekende grootheden worden ingevoerd. De verplaatsingen van de uiteinden van deze onderdelen kunnen dan worden uitgedrukt in deze onbekenden door middel van de uitkomsten van hoofdstuk 21.

Voor alle uiteinden wordt dan vereist dat de onderdelen ook in de vervormde toestand aan elkaar blijven passen: de voorwaarde van compatibiliteit. Hieruit volgt een stelsel vergelijkingen dat moeizaam met de hand of comfortabel met behulp van de computer kan worden opgelost. Als alle krachten en momenten in de staafeinden bekend zijn, dan is de krachtswerking in de gehele constructie bekend. In KW-5 worden enkele gevallen behandeld van doorgaande liggers en eenvoudige portalen

Bij de verplaatsingsmethode worden de verplaatsingen en rotaties van de staafluiteinden als onbekenden ingevoerd, zodat de samenhang al is gegarandeerd. Uit de voorwaarden van evenwicht volgen dan de daartoe benodigde krachten en momenten.

Handberekeningen zijn alleen mogelijk door gebruik te maken van een iteratiemethode: de methode Cross, die wordt behandeld in KW-6.

Voor computerberekeningen wordt gebruik gemaakt van matrix-rekening, die buiten het kader valt van KW-5 omdat ze alleen van belang is voor diegenen die zelf computerprogramma's willen ontwikkelen in plaats van gebruik te maken van standaard-programma's.

22.1.4 VERVORMINGEN ALGEMEEN

In hoofdstuk 23 wordt een algemene methode besproken om de vervormingen te bepalen van willekeurig belaste lijnvormige elementen.

In hoofdstuk 24 wordt op het *knikverschijnsel* ingegaan, waarbij staven onder centrische druk boven een bepaalde drukkracht niet langer centrisch verkorten, maar vrij plotseling zeer sterk uitbuigen. Het is dus een buigverschijnsel, maar de evenredigheid tussen belasting en vervorming is volledig verloren gegaan. Staven die statisch bepaald worden belast, zullen dan ook vrijwel zeker bezwijken. Maatgevend voor het verschijnsel zijn de buigstijfheid van de staaf, de lengte en de randvoorwaarden.

22.2.1 AANPAK VAN HET PROBLEEM

Onder doorgaande liggers verstaan we liggers die op meer dan twee steunpunten rusten, zoals is weergegeven in het schema van fig. 1. De overspanning tussen twee opeenvolgende steunpunten noemen we meestal een veld van de ligger. Zo kunnen we spreken van randvelden en middenvelden (dit zijn alle velden die minstens één veld vanaf de rand zijn verwijderd).

We zullen de manier van berekenen eerst in algemene termen bespreken. We beschouwen daartoe een model van een doorgaande ligger met ongelijke velden, die zijn belast door willekeurige belastingen, zie fig. 2a. De ligger is statisch onbepaald opgelegd en we kunnen de momentenverdeling dus nog niet aangeven. Het is wel duidelijk aan de kromming van de ligger te zien dat afwisselend positieve en negatieve buigende momenten optreden.

Voor de oplossing van het probleem moeten we de constructie eerst statisch bepaald maken. Dat zullen we doen door sneden in de doorgaande ligger aan te brengen ter plaatse van de tussensteunpunten. We houden dan drie vrij opgelegde liggers over, zie fig. 2b1. De momentenverdeling in elk van die liggers kan dan zonder meer worden bepaald, zie fig. 2b2. Voorts kunnen ook de hoekverdraaiingen aan de uiteinden van de liggers uit het model worden opgemeten; fig. 2b3.

In principe kunnen we deze hoekverdraaiingen ook berekenen. Voorlopig kunnen wij zo'n berekening alleen nog maar uitvoeren voor een gelijkmatig verdeelde belasting; in paragraaf 23.4 [568] en 23.5 [574] wordt een berekeningsmethodiek besproken voor willekeurig belaste liggers. Ter bepaling van de gedachte kan men zich voorstellen dat we de hoekverdraaiingen gewoon uit het model opmeten en de hoeken vergelijken met die voor een gelijkmatig verdeelde belasting, die we immers wel kennen.

Dit stelsel van afzonderlijke vrij opgelegde liggers wordt aangeduid als *het statisch bepaalde hoofdsysteem*. Hiervan kennen we dus zowel de momentenverdeling als de vervormingen, maar de doorbuigingen zijn wel een stuk groter dan die van de oorspronkelijke doorgaande ligger.

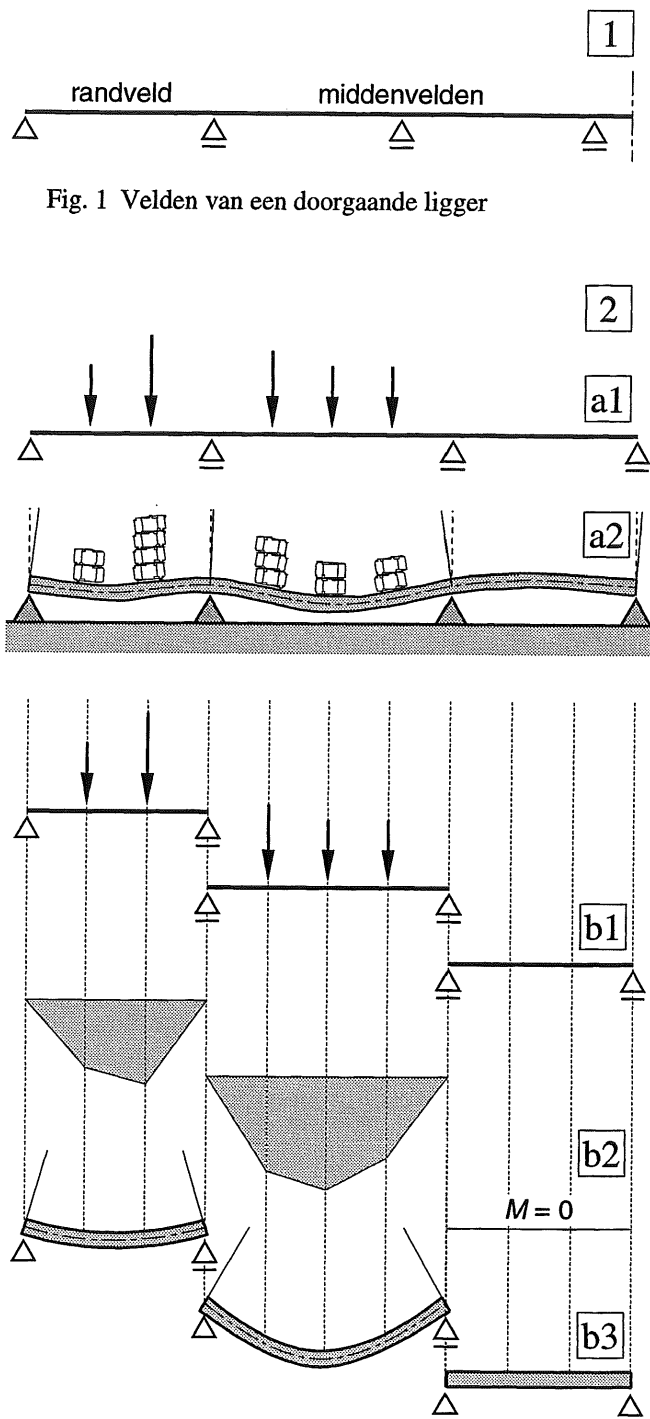


Fig. 2 Splitsen van een doorgaande ligger met ongelijke velden die willekeurig zijn belast
 a1 Schema a2 Model
 b. Na het aanbrengen van sneden boven de tussensteunpunten blijven drie vrij opgelegde liggers over: *het statisch bepaalde hoofdsysteem*
 b1 Schema b2 Momentenlijnen
 b3 Model van de drie vrij opgelegde liggers met gapingen boven de tussensteunpunten

Om de oorspronkelijke toestand te herstellen, moeten we de gapingen tussen de liggers dus weer zien te sluiten. Hiertoe zullen we buigende momenten aanbrengen op de ligger-uiteinden ter plaatse van de aangebrachte sneden.

We beschouwen eerst de invloed van één zo'n koppel. De oplegreacties kunnen gemakkelijk worden aangegeven, zie fig. 3a. Het koppel van de gelijke en tegengesteld gerichte verticale oplegreacties zal immers evenwicht moeten maken met het uitwendig aangrijpende koppel. Het momentenverloop ten gevolge van één zo'n koppel is direct te tekenen, zie fig. 3b [518].

Belangrijk is ook de grootte van de hoekverdraaiingen die optreden ter plaatse van de opleggingen, zie fig. 3c. Vergelijk zonnodig basisligger C1 [518].

We brengen nu in de punten B en C van de nog steeds doorgesneden doorgaande ligger A-D op de aangrenzende ligger-uiteinden per punt twee gelijke en tegengesteld gerichte koppels aan, waarvan de grootte K_B en K_C voorlopig nog onbekend is, zie fig. 4a. Als we deze koppels zo weten te kiezen dat tegelijkertijd de gapingen in B en C worden gesloten, dan hebben we onze oorspronkelijke doorgaande ligger weer terug.

Want de uitwendige momenten die we eerst zelf moesten aanbrengen, kunnen nu volgens het beginsel 'actie = reactie' door de ligger zelf worden geleverd. Bij wijze van spreken draaien we de gapingen met de hand dicht en plakken de ligger-uiteinden dan gauw aan elkaar.

Het enige dat we voor de berekening behoeven te doen is het opstellen van vergelijkingen in de punten B en C. De grootte van de gapingen in de punten B en C is bekend en moet in elk van de twee punten worden opgeheven door de gezamenlijke invloed van de koppels K_B en K_C . Bedenk hierbij steeds: een koppel dat aangrijpt op één uiteinde van een ligger veroorzaakt ook een hoekverdraaiing aan het andere uiteinde van dezelfde ligger, zie fig. 3.

Op deze wijze verkrijgen we twee vergelijkingen met twee onbekenden waaruit de de grootte van K_B en K_C gemakkelijk kan worden bepaald.

Als we dan bij elk vrij opgelegd liggertje de koppels op de uiteinden superponeren, dan zullen alle onderdelen van de uiteindelijke momentenlijn ook zonder meer aan elkaar passen, zie fig. 4b, c.

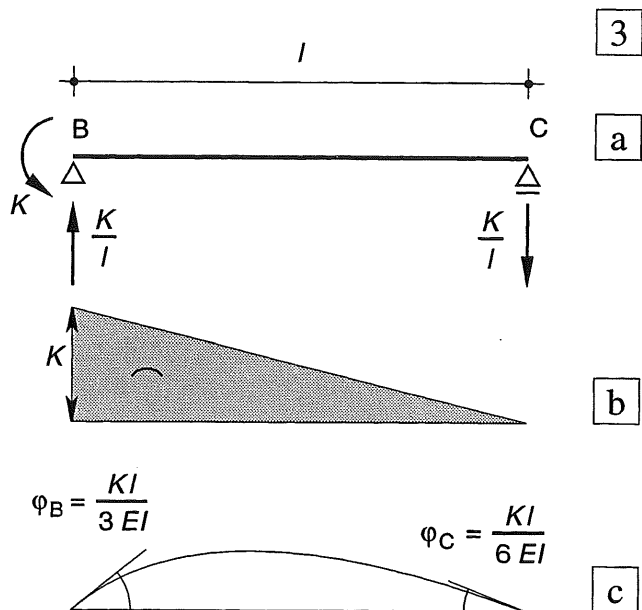


Fig. 3 Het aanbrengen van één koppel op een ligger-uiteinde

- Schema met bijbehorende oplegreacties
- Momentenlijn
- Doorbuigingslijn met hoekverdraaiingen aan de uiteinden

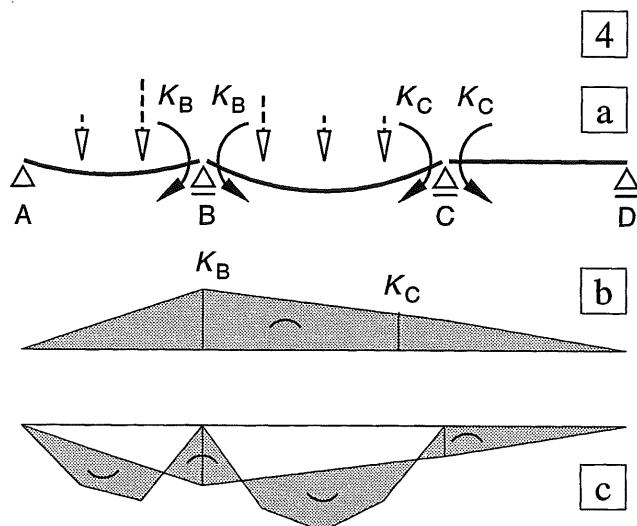


Fig. 4 Herstellen van de oorspronkelijke toestand

- Statisch bepaald hoofdsysteem met koppels K_B en K_C om de gapingen weer te sluiten
- Momentenlijn ten gevolge van de overgangsmomenten K_B en K_C alléén
- Uiteindelijke momentenlijn als superpositie van de momentenlijnen uit fig. 2b2 en 4b

22.2.2 BEREKENINGSMETHODE

Zolang elk veld over de gehele lengte is belast door een gelijkmatig verdeelde belasting, kunnen we met onze beperkte kennis de berekening al uitvoeren.

Zoals is besproken in [530-531], wordt de doorgaande ligger eerst verdeeld in een aantal liggers op twee steunpunten, zie fig. 1a, b.

De liggers mogen ongelijk van lengte zijn en ze mogen verschillende buigstijfheden bezitten.

Verder mogen de velden verschillende q -lasten dragen of onbelast zijn.

Voor elke afzonderlijke ligger geldt een parabolisch momentenverloop met als maximum :

$$M_{i \max} = 1/8 q_i l_i^2, \text{ zie fig. 1c.}$$

Voor elke ligger zijn de hoekverdraaiingen aan beide uiteinden gelijk aan, zie fig. 1d:

$$\varphi_i = q_i l_i^3 / 24 EI_i$$

De ontstane gaping boven een oplegging is dan gelijk aan, zie fig. 1e:

$$\varphi_i + \varphi_j$$

Om de afzonderlijke liggers weer tot één doorgaande ligger te verenigen, moeten we de gapingen tussen de opeenvolgende liggers sluiten.

Per steunpunt worden daartoe op de beide uiteinden van de daar samenkomende liggers, gelijke en tegengesteld gerichte koppels aangebracht, zie fig. 2a, b. Na sluiting van de 'gaping' tussen elk tweetal liggers, zullen deze koppels evenwicht met elkaar maken als inwendige buigende momenten. Om deze reden zijn de koppels K uit fig. 2a in het vervolg van de berekening (vanaf fig. 2b) vervangen door de momenten M .

Een moment M_k op ligger i veroorzaakt t. p.v. zijn aangrijpingspunt een hoekverdraaiing:

$$\varphi_i = M_k l_i / 3 EI_i, \text{ zie fig. [531-3c].}$$

Aan het andere uiteinde van de ligger is de hoekverdraaiing half zo groot:

$$\varphi'_i = M_k l_i / 6 EI_i$$

Per steunpunt hebben dus beide uiteinden van elk tweetal aangrenzende liggers invloed op het sluiten van de gaping.

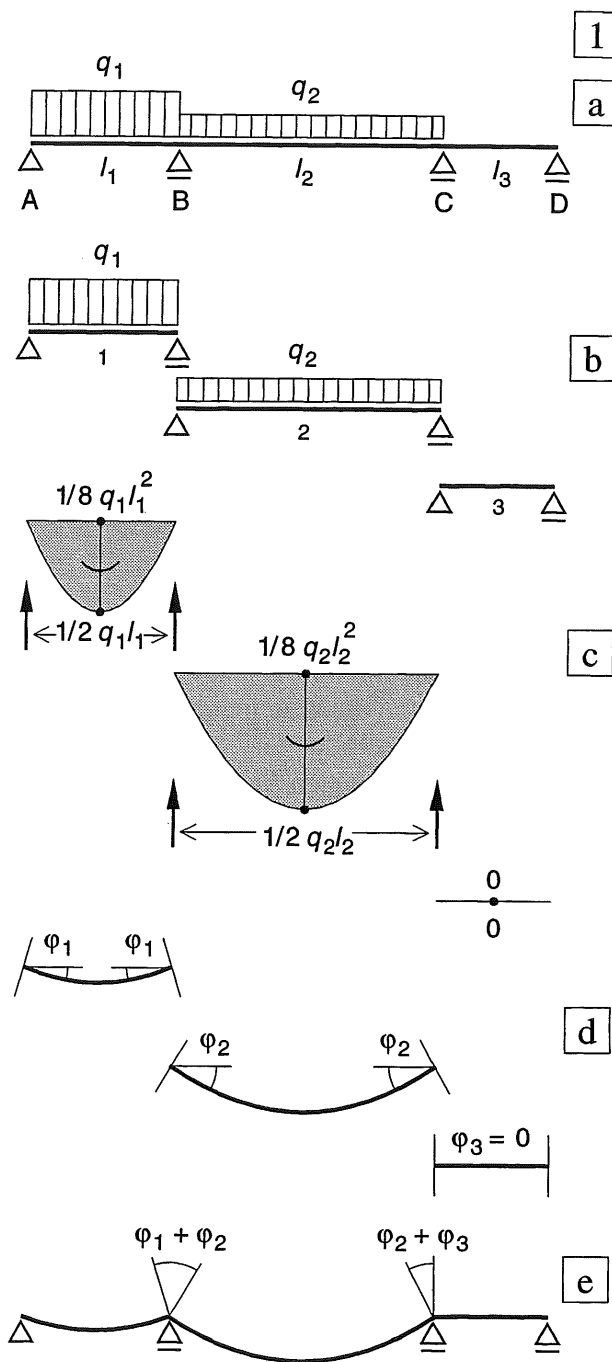


Fig. 1 Doorgaande ligger; berekening van het statisch bepaalde hoofdsysteem

- Belastingschema van de doorgaande ligger
- Splitsen in afzonderlijke vrij opgelegde liggers
- Momentenlijnen voor de afzonderlijke liggers, met de bijbehorende oplegreacties
- Doorbuigingslijnen van de drie liggers met de daaruitvolgende hoekverdraaiingen ter plaatse van de opleggingen
- Grootte van de 'gapingen' boven de twee middensteunpunten

Onderaan in fig. 2f zijn de twee vergelijkingen opgeschreven die nodig zijn voor het sluiten van de gapingen bij de punten B en C. Na substitutie van de numerieke waarden kunnen de onbekende momenten gemakkelijk worden opgelost. Deze vergelijkingen worden meestal aangeduid als *gaapvergelijkingen*, en de buigende momenten ter plaatse van de ondersteuning dikwijls als (*negatieve*) *overgangsmomenten*.

Het opstellen van de vergelijkingen kan – ook voor lange doorgaande liggers – betrekkelijk routinematig gebeuren. Het oplossen van een dergelijk stelsel vergelijkingen met de hand, leidt vrijwel zeker tot vergissingen en foutieve uitkomsten. Met behulp van een computer zijn dergelijke stelsels vergelijkingen echter wél snel op te lossen.

In fig. 2c is weergegeven welk momentenverloop in de drie afzonderlijke liggers zal ontstaan onder invloed van de negatieve overgangsmomenten. In deze figuren is ook de verdeling van de oplegreacties weergegeven.

In fig. 2d is de momentenlijn getekend die ontstaat door superpositie van de twee gevallen uit fig. 2c.

De uiteindelijke momentenlijn is weergegeven in fig. 2e. Ze ontstaat door de momentenlijnen voor de drie afzonderlijke liggers ten gevolge van de uitwendige belasting uit fig. 1c te superponeren op de momentenlijn uit fig. 2d, die is ontstaan door het aanbrengen van de overgangsmomenten ter plaatse van de tussensteunpunten.

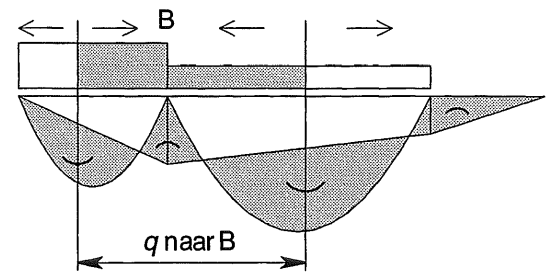
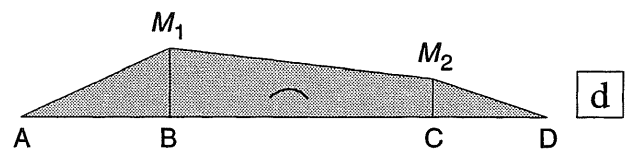
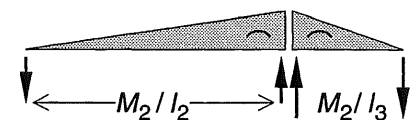
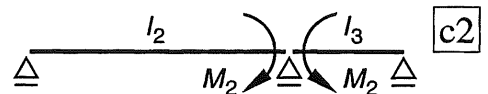
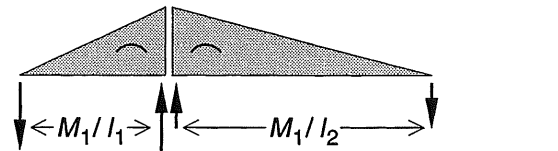
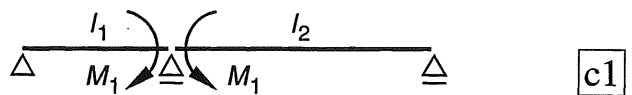
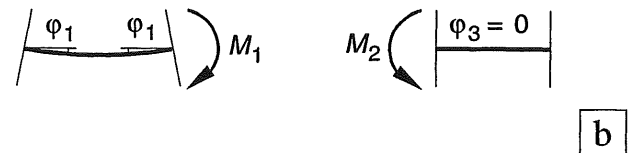
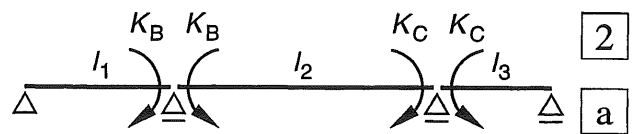
Een voorbeeld voor de berekening van een oplegreactie is weergegeven in fig. [534-1].

Als controle op de oplegreacties kunnen we de volgende stelling gebruiken: de dwarskracht is gelijk aan nul ter plaatse van het maximale (positieve) buigende moment. Deze punten vormen als het ware de 'waterscheidingen' voor de belastingafdracht. Hierdoor zijn de oplegreacties in de punten A en B volledig bepaald, zie fig. 2e.

Maar doordat veld 3 onbelast is gebleven, komen er in de punten C en D nog bij: de oplegreacties $R = \pm M_2 / l_3$.

Fig. 2 Opstellen van de gaapvergelijkingen

- Belasting-schema
- Doorgebogene liggers ten gevolge van de q -belasting met overgangsmomenten
- Momenten in de liggers 1 en 2 ten gevolge van het overgangsmoment M_1 met oplegreacties
- Momenten in de liggers 2 en 3 ten gevolge van het overgangsmoment M_2 met oplegreacties
- Superpositie van de momenten uit c1 en c2
- Uiteindelijke momentenlijn met de 'waterscheidingen' voor de belastingafdracht
- Gaapvergelijkingen voor de punten B en C



$$\text{B: } \frac{q_1 l_1^3}{24 EI_1} + \frac{q_2 l_2^3}{24 EI_2} = \frac{M_1 l_1}{3 EI_1} + \frac{M_1 l_2}{3 EI_2} + \frac{M_2 l_2}{6 EI_2}$$

$$\text{C: } \frac{q_2 l_2^3}{24 EI_2} + 0 = \frac{M_1 l_2}{6 EI_2} + \frac{M_2 l_2}{3 EI_2} + \frac{M_2 l_3}{3 EI_3}$$

22.2.3 DOORGAANDE LIGGERS MET GELIJKE OVERSPANNINGEN

We gaan uit van het veelvuldig voorkomende geval waarbij de liggers gelijke overspanningen en gelijke buigstijfheden bezitten en ook gelijke belastingen dragen. We zullen achtereenvolgens liggers beschouwen met 2, 3, 4 en 5 overspanningen. Het principe van de berekening blijft hierbij hetzelfde. De bedoeling van de berekeningen is voornamelijk om de trend van de verschijnselen te leren onderkennen.

De schema's voor de berekening van de doorgaande liggers zijn weergegeven in fig. 1.

De momentenlijnen zijn weergegeven in fig. 2. De oplegreacties volgen uit de superpositie van de waarden voor het statisch bepaald hoofdsysteem [532-1c] met die voor de overgangsmomenten [533-2c]. In fig. 1 (rechts) is een voorbeeld nader uitgewerkt.

Het is echter gemakkelijker om de oplegreacties te baseren op de plaats van de maximale positieve momenten [533-2e].

Ligger met twee overspanningen, zie fig. 1a.

Sluiting van de gaping bij punt B:

$$2 * \frac{q l^3}{24 EI} = 2 * \frac{M_1 l}{3 EI}$$

$$M_1 = \frac{1}{8} q l^2$$

Ligger met drie overspanningen, zie fig. 1b.

Vanwege de symmetrie moeten in B en C dezelfde overgangsmomenten optreden, zodat we alleen het sluiten van de gaping bij B maar behoeven te berekenen.

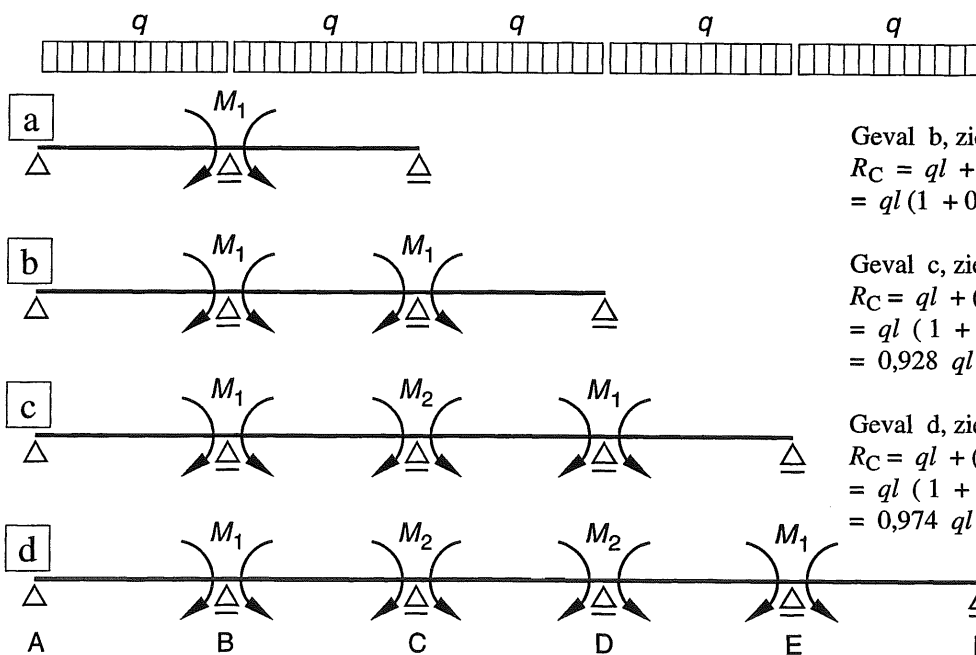
Hierbij moeten we uiteraard wel rekening houden met het moment dat in punt C op ligger BC aangrijpt.

$$2 * \frac{q l^3}{24 EI} = 2 * \frac{M_1 l}{3 EI} + \frac{M_1 l}{6 EI}$$

$$M_1 = \frac{6}{5} * \frac{1}{12} q l^2 = \frac{1}{10} q l^2$$

Oplegreactie in punt C (gevallen: b, c, d)

$$R_C = 2 * 1/2 q l + (2 M_C - M_B - M_D) / l$$



Geval b, zie ook fig. 2b:

$$R_C = q l + (2 M_1 - M_1 - 0) / l = q l (1 + 0,100) = 1,1 q l$$

Geval c, zie ook fig. 2c:

$$R_C = q l + (2 M_2 - M_1 - M_1) / l = q l (1 + 2 * 0,071 - 2 * 0,107) = 0,928 q l$$

Geval d, zie ook fig. 2d:

$$R_C = q l + (2 M_2 - M_1 - M_2) / l = q l (1 + 1 * 0,079 - 1 * 0,105) = 0,974 q l$$

Fig. 1 Schema's voor de berekening van de overgangsmomenten van doorgaande liggers onder gelijkmatig verdeelde belasting

Rechts: berekening van de oplegreactie R_C

- Ligger met twee overspanningen
- Ligger met drie overspanningen
- Ligger met vier overspanningen
- Ligger met vijf overspanningen

Ligger met vier overspanningen, zie fig. 1c.

Vanwege de symmetrie moeten de overgangsmomenten in B en D gelijk zijn, zodat we een tweede onbekende overgangsmoment M_2 in punt C moeten invoeren. De gaapvergelijkingen voor de punten B en C luiden dan achtereenvolgens:

$$2 * \frac{ql^3}{24 EI} = 2 * \frac{M_1 l}{3 EI} + \frac{M_2 l}{6 EI}$$

$$2 * \frac{ql^3}{24 EI} = 2 * \frac{M_2 l}{3 EI} + 2 * \frac{M_1 l}{6 EI}$$

Na vereenvoudiging vinden we:

$$ql^2 = 8 M_1 + 2 M_2$$

$$ql^2 = 8 M_2 + 4 M_1$$

Hieruit volgen als overgangsmomenten:

$$M_1 = \frac{3}{28} ql^2$$

$$M_2 = \frac{2}{28} ql^2 = \frac{1}{14} ql^2$$

Ligger met vijf overspanningen, zie fig. 1d.

Ook bij een ligger met vijf overspanningen komen vanwege de symmetrie maar twee onbekende overgangsmomenten voor. De vergelijking voor punt B blijft onveranderd, maar voor punt C moet zowel de invloed van punt B als van punt D worden verdisconteerd. De beide vergelijkingen luiden als volgt:

$$2 * \frac{ql^3}{24 EI} = 2 * \frac{M_1 l}{3 EI} + \frac{M_2 l}{6 EI}$$

$$2 * \frac{ql^3}{24 EI} = 2 * \frac{M_2 l}{3 EI} + \frac{M_1 l}{6 EI} + \frac{M_2 l}{6 EI}$$

Na vereenvoudiging vinden we:

$$ql^2 = 8 M_1 + 2 M_2$$

$$ql^2 = 10 M_2 + 2 M_1$$

Hieruit volgen als overgangsmomenten:

$$M_1 = \frac{4}{38} ql^2$$

$$M_2 = \frac{3}{38} ql^2$$

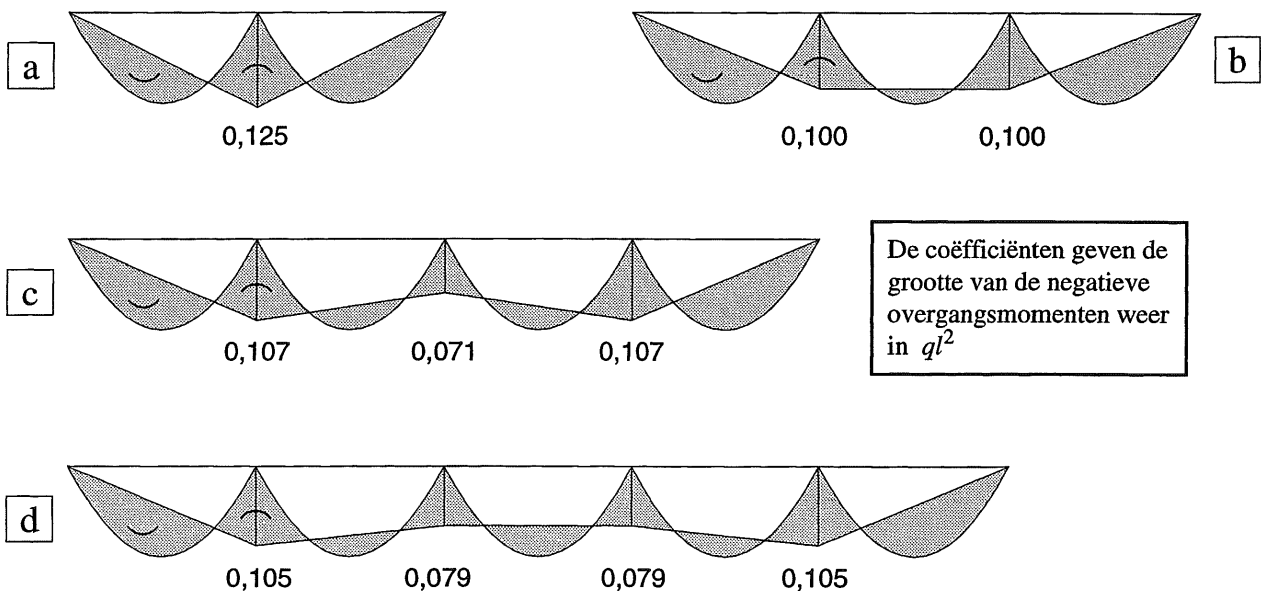


Fig. 2 Momentenlijnen voor de doorgaande liggers

- Ligger met twee overspanningen
- Ligger met drie overspanningen
- Ligger met vier overspanningen
- Ligger met vijf overspanningen
- Ideaal middenveld (geval A3)
(= veld van een oneindig lange doorgaande ligger met gelijke velden en belastingen)

22.2.4 INVLOED RANDVELDEN

Uit een beschouwing van fig. [535-2] blijkt dat bij liggers met drie of meer overspanningen, het overgangsmoment in het randveld vrijwel gelijk blijft aan: $M = -1/10 ql^2$.

De overgangsmomenten bij de daaropvolgende steunpunten in de middenvelden naderen snel tot de waarde:

$M = -1/12 ql^2$, die geldt voor de oneindig lange doorgaande ligger.

De oplegreacties onder de middensteunpunten zijn praktisch gelijk aan ql .

Om in alle velden hetzelfde momentenverloop te verkrijgen, hebben we in KW-2 als hulpmiddel gebruik gemaakt van het aanbrengen van scharnieren [290-291].

Bij een uitvoering in gewapend beton zal men dit middel niet gauw toepassen.

Er staan ons echter nog twee andere middelen ten dienste om te zorgen dat ook het eerste overgangsmoment een waarde aanneemt van:

$M = -1/12 ql^2$, zie fig. 1.

- a. Het aanbrengen van een overstek
- b. Het verkorten van het eindveld

In fig. 1a heeft het overstek een lengte a . Het overgangsmoment volgt uit geval B3 [515]:

$$1/2 qa^2 = 1/12 ql^2, \text{ ofwel}$$

$$a = 1/6 l \sqrt{6} = 0,41 l$$

Als we het eindveld korter maken, zoals is weergegeven in fig. 1b, en deze lengte weer a noemen, volgt de afstand a uit geval A2 [513]:

$$1/8 qa^2 = 1/12 ql^2, \text{ ofwel}$$

$$a = 1/3 l \sqrt{6} = 0,82 l$$

Uiteraard kan het soms wenselijk zijn om overstekken van andere lengte toe te passen. Deze overstekken zijn dan ter plaatse van de buitensteunpunten verend ingeklemd en de grootte van de inklemmingsmomenten is bekend.

De bijbehorende dwarskracht vanuit het overstek wordt direct door het steunpunt opgenomen, zie zonedig [523].

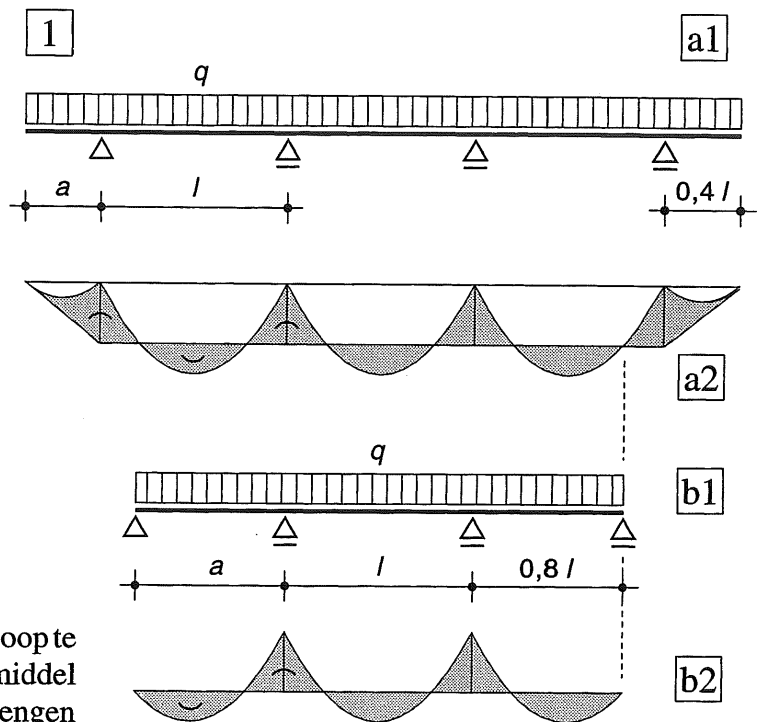


Fig. 1 Maatregelen om zoveel mogelijk gelijke momenten in alle velden te verkrijgen

- a. Overstek met bijbehorende momentenlijn
- b. Verkort eindveld met bijbehorende momentenlijn

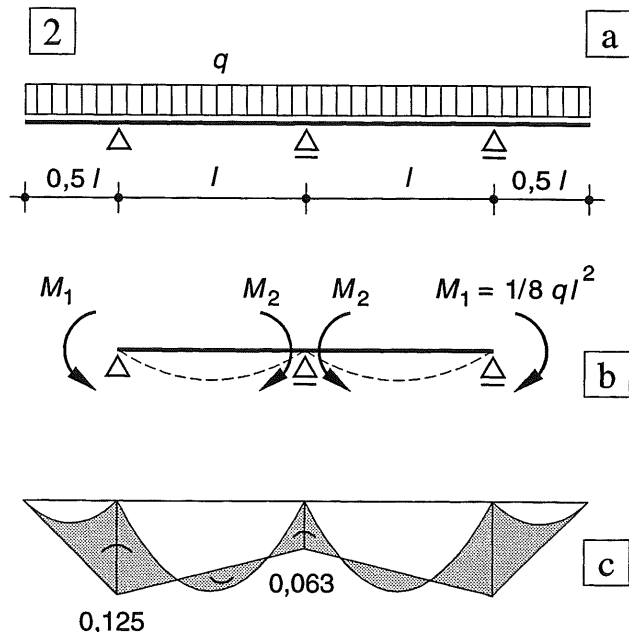


Fig. 2 Doorgaande ligger over drie steunpunten met relatief grote overstekken ($l/2$)

- a. Schema van de werkelijke ligger
- b. Schema voor de berekening
- c. Momentenlijn

Ligger met relatief grote overstekken

In fig. 2a is het schema van een dergelijke ligger getekend. Het rekenschema is weergegeven in fig. 2b. Voor de buitensteunpunten behoeven we nu geen vormveranderingsvergelijkingen op te stellen; we zullen de daar optredende hoekverdraaiingen gewoon moeten accepteren. De daar aangrijpende momenten beïnvloeden uiteraard wel de hoekverdraaiing bij het volgende steunpunt. De vormveranderingsvergelijking luidt:

$$2 * \frac{q l^3}{24 EI} = 2 * \frac{M_1 l}{6 EI} + 2 * \frac{M_2 l}{3 EI}$$

$$M_1 = \frac{1}{2} q \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} q l^2$$

$$M_2 = \frac{1}{16} q l^2$$

De momentenlijn is weergegeven in fig. 2c. De negatieve momenten ter plaatse van de buitenste steunpunten blijken in dit geval te gaan overheersen. Daardoor neemt de doorbuiging van het overstek sterk toe.

Een berekening leert dat deze even groot is als bij een vrij opgelegde ligger met een overspanning l , terwijl in het geval van fig. 1a het overstek een doorbuiging veroorzaakt van $4/3 \times$ de doorbuiging van een volledig ingeklemde ligger. Door de verlenging van het overstek met $0,1 l$ neemt de doorbuiging van het overstek dus toe met een factor: $(5/384 : 1,33/384) \approx 4$.

In fig. 2 is een symmetrische ligger gekozen op drie steunpunten, zodat we maar één vergelijking met één onbekende behoeven op te lossen. Bij doorgaande liggers over meerdere steunpunten, loopt het aantal vergelijkingen op en daarmee de kans op vergissingen. De invloed van het overgangsmoment ter plaatse van één steunpunt dempt echter vrij snel uit en bij lange liggers kunnen we meestal volstaan met de beschouwing van een klein gedeelte ter lengte van twee of drie velden, zie [538-539].

Fig. 3 Afwisselend belaste velden
a. Belasting-schema
b. Overgangsmomenten
c. Momentenlijn

22.2.5 VELDEN AFWISSELEND BELAST

Het eigen gewicht van de ligger plus het eigen gewicht van de daarop rustende onderdelen vormen tezamen de permanente belasting, die we vrijwel altijd zullen vervangen door een gelijkmatig verdeelde belasting.

De veranderlijke belasting kan echter wel of niet aanwezig zijn. Ter wille van een eenvoudige berekening nemen we hiervoor meestal aan, dat een veld of over de gehele lengte is belast of juist geheel is onbelast.

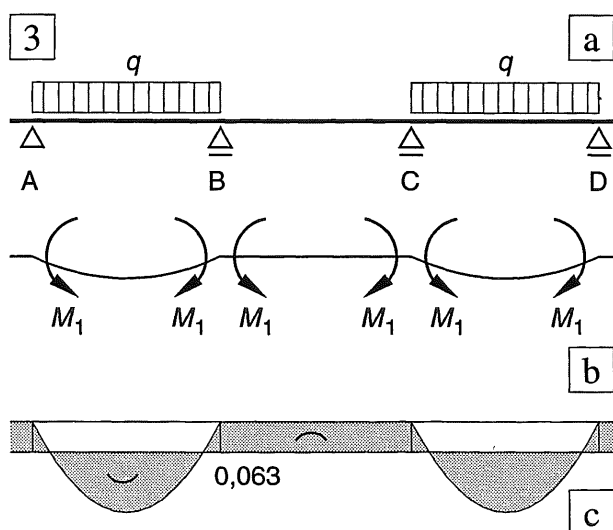
We beschouwen alleen het middendeel van een lange doorgaande ligger, zie fig. 3a. Aangezien bij elk steunpunt één aangrenzend veld wél is belast en het andere niet is belast, kan er maar één onbekend overgangsmoment M_1 aanwezig zijn, zoals is aangegeven in fig. 3b.

De gaapvergelijking voor punt B luidt:

$$\frac{q l^3}{24 EI} + 0 = 2 * \frac{M_1 l}{3 EI} + 2 * \frac{M_1 l}{6 EI}$$

$$M_1 = \frac{1}{24} q l^2$$

De momentenlijn is weergegeven in fig. 3c. De onbelaste velden hebben een constant negatief buigend moment, de positieve buigende momenten zijn verdubbeld ten opzichte van het geval dat alle velden zijn volbelast.



22.2.6 INVLOED RANDMOMENT

Uit de voorgaande paragrafen blijkt dat de momenten-verdeling in een doorgaande ligger erg eenvoudig is als de invloed van de randvelden niet behoeft te worden beschouwd: dit volgt uit fig. [535-2e] en fig. [537-3c].

In [534-535] zijn doorgaande liggers met 2, 3, 4 en 5 velden rechtstreeks berekend. Voor elk afzonderlijk geval volgt dan de grootte van de diverse overgangsmomenten. We kunnen dit ook op een wat andere manier aanpakken.

We gaan uit van een doorgaande ligger met drie of meer velden, zie fig. 1a. Aan de uiteinden van de ligger brengen we zelf randmomenten aan, die er voor zorgen dat elk veld zich gedraagt als een ideaal middenveld, zie fig. 1b.

Om de werkelijke momentenverdeling te vinden behoeven we aan beide uiteinden dan alleen maar gelijke en tegengesteld gerichte randmomenten te superponeren.

De invloed van één zo'n randmoment dempt betrekkelijk snel uit. Het belastinggeval is weergegeven in fig. 1c1. Het uitwendige moment K is zodanig aangebracht dat het buitenveld aan een positief buigend moment wordt onderworpen.

De gaapvergelijkingen voor de punten B, C, D, E luiden achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} \frac{Kl}{6EI} &= \frac{M_1 l}{3EI} + \frac{M_1 l}{3EI} + \frac{M_2 l}{6EI} \\ 0 &= \frac{M_1 l}{6EI} + \frac{M_2 l}{3EI} + \frac{M_2 l}{3EI} + \frac{M_3 l}{6EI} \\ 0 &= \frac{M_2 l}{6EI} + \frac{M_3 l}{3EI} + \frac{M_3 l}{3EI} + \frac{M_4 l}{6EI} \\ 0 &= \frac{M_3 l}{6EI} + \frac{M_4 l}{3EI} + \frac{M_4 l}{3EI} \end{aligned}$$

Dit stelsel vergelijkingen kan eenvoudiger worden geschreven als:

$$\begin{aligned} K &= 4M_1 + M_2 \\ 0 &= M_1 + 4M_2 + M_3 \\ 0 &= M_2 + 4M_3 + M_4 \\ 0 &= M_3 + 4M_4 \end{aligned}$$

Beginnend met M_4 kunnen de onbekende momenten achtereenvolgens worden geëlimineerd, zodat tenslotte M_1 kan worden uitgedrukt in K . Voor degene die dit zou willen narekenen zijn de momenten in breukvorm weergegeven, de grootte van de momenten komt uiteraard beter tot zijn recht in decimale schrijfwijze. We vinden dan:

$$\begin{aligned} M_1 &= + \frac{56}{209} K = + 0,268 K & \left| \frac{M_1}{K} &= \frac{56}{209} = 0,268 \right. \\ M_2 &= - \frac{15}{209} K = - 0,072 K & \left| \frac{M_2}{M_1} &= \frac{15}{56} = 0,268 \right. \\ M_3 &= + \frac{4}{209} K = + 0,019 K & \left| \frac{M_3}{M_2} &= \frac{4}{15} = 0,267 \right. \\ M_4 &= - \frac{1}{209} K = - 0,005 K & \left| \frac{M_4}{M_3} &= \frac{1}{4} = 0,250 \right. \end{aligned}$$

Het momentenverloop is uitgezet in fig. 1c2. Het moment in punt E blijkt minder te bedragen dan 1 % van K .

De opeenvolgende overgangsmomenten blijken te worden gereduceerd met een vrijwel constante factor 0,27.

Als we punt F volledig inklemmen, dan verandert alleen de laatste vergelijking van het stelsel, omdat dan in punt F een linksdraaiend inklemmingsmoment ter grootte $1/2 M_4$ moet worden toegevoegd, zie fig. 1c3. We moeten dan de uitdrukking: $0 = M_3 + 4M_4$ vervangen door:

$$0 = 2M_3 + 7M_4 \text{ zoals gemakkelijk is te verifiëren.}$$

De oplossing van dit stelsel vergelijkingen levert:

$$\begin{aligned} M_1 &= + \frac{97}{362} K = + 0,268 K & \left| \frac{M_1}{K} &= \frac{97}{362} = 0,268 \right. \\ M_2 &= - \frac{26}{362} K = - 0,072 K & \left| \frac{M_2}{M_1} &= \frac{26}{97} = 0,268 \right. \\ M_3 &= + \frac{7}{362} K = + 0,019 K & \left| \frac{M_3}{M_2} &= \frac{7}{26} = 0,269 \right. \\ M_4 &= - \frac{2}{362} K = - 0,006 K & \left| \frac{M_4}{M_3} &= \frac{2}{7} = 0,286 \right. \\ M_5 &= + \frac{1}{362} K = + 0,003 K \end{aligned}$$

De momenten blijken op tekennauwkeurigheid gelijk te zijn aan die van het vorige geval, hetzelfde geldt voor de reductiefactor 0,27. Voor de benaderingsberekening van fig. 1d is deze factor vervangen door $1/4$

Voor het randmoment K in A, fungeert punt B als een verende inklemming. Er kan in punt B wel een moment worden opgenomen, maar omdat punt B een rotatie kan ondergaan, is dit inklemmingsmoment globaal gelijk aan de helft van het moment dat bij een volledige inklemming zou optreden dus $1/4 K$ in plaats van $1/2 K$ [519-C3].

Uit het momentenverloop van fig. 1c blijkt verder dat het effect van het randmoment zo snel afneemt, dat we voor de berekening de ligger eigenlijk al in punt C of D met een scharnier of een inklemming kunnen beëindigen.

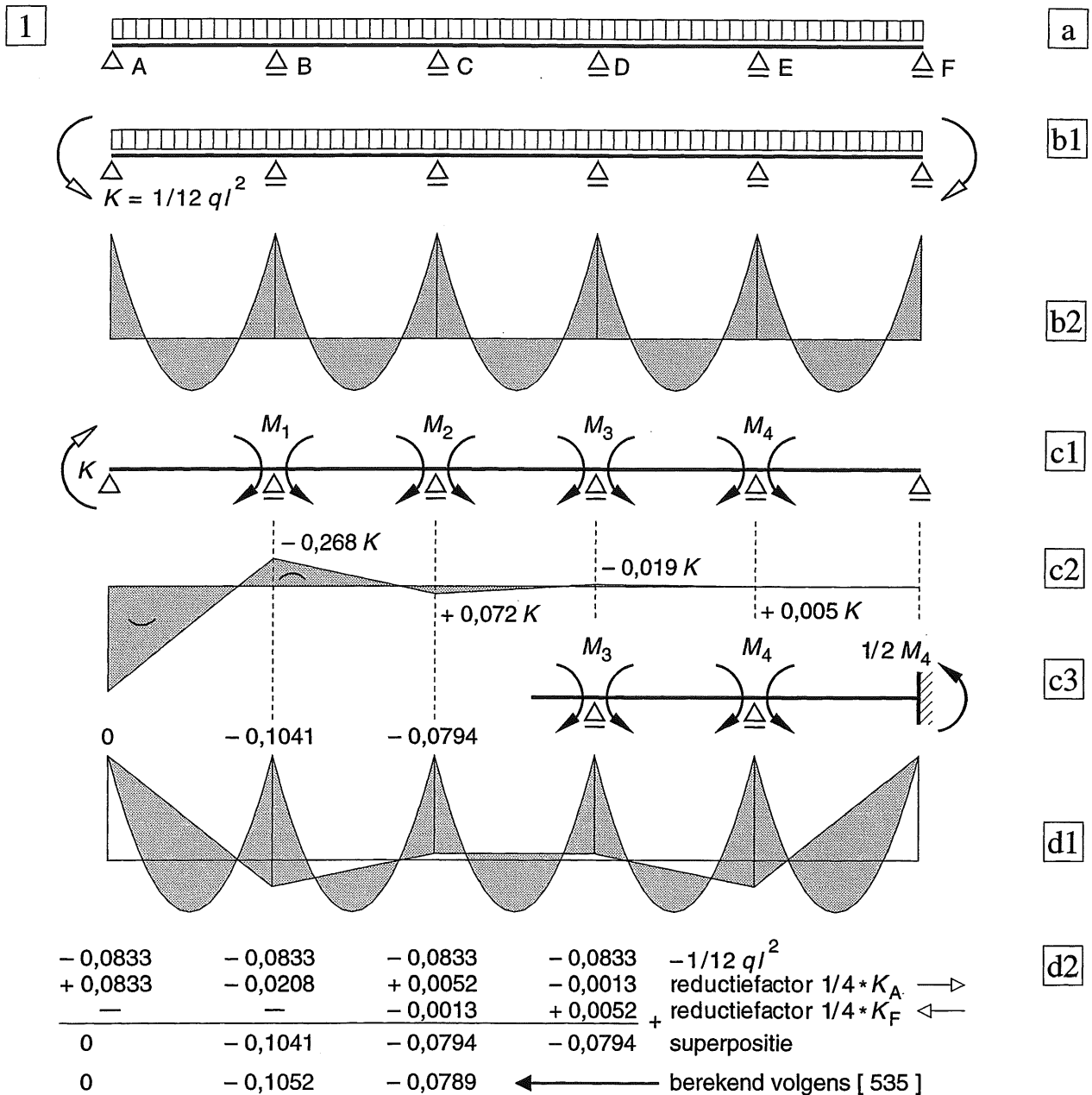


Fig. 1 Doorgaande ligger met 5 velden

- a. Gelijkmatic verdeelde belasting
- b. Aanbrengen van randmomenten om het momentenverloop voor ideale middenvelden te verkrijgen
- c1 Schema met één randmoment K (+ de onbekende overgangsmomenten M)
- c2 Momentenverloop
- c3 Scharnier in F vervangen door een inklemming

- d1 Momentenverloop voor de ligger volgens fig. 1a verkregen door superpositie van fig. b2 met randmomenten $K = 1/12 ql^2$ in de punten A en F, uitgaande van een reductiefactor $1/4$.
- d2 Numerieke waarde van de overgangsmomenten bepaald door middel van superpositie; vergelijking met de rechtstreeks berekende waarden (zie de rechterkolom van [535])

Uit de berekening blijkt dat de opeenvolgende overgangsmomenten van links naar rechts gaande, globaal een factor 4 kleiner worden. Met behulp van deze vuistregel is het momentenverloop in doorgaande liggers volgens [535] met drie of meer overspanningen dus zeer snel te bepalen. Uitgaande van het linker uiteinde wordt het momentenverloop volgens c2 gesuperponeerd op dat van b2 en uitgaande van het rechter uiteinde het gespiegelde momentenverloop van c2.

22.3.1 DEFINITIE PORTALEN

Portalen zijn reeds gedefiniëerd bij de introductie van lijnvormige constructie-onderdelen in KW-2 [202-203]. Hieronder volgt een herhaling en aanvulling van een en ander.

Een *portaal* bestaat uit een samenstel van horizontale en verticale lijnvormige constructie-onderdelen die buigvast met elkaar zijn verbonden. De verticale onderdelen noemen we *stijlen* en de horizontale *regels*, zie fig. 1a.

Als de regel alleen aan de uiteinden door stijlen is ondersteund, zoals in fig. 1a, spreken we van een *éénbeukig portaal*. Als de regel door meer stijlen is ondersteund – meestal op regelmatige afstanden – noemen we het portaal een *meerbeukig portaal*. Zo spreekt men van twee-, drie- of vierbeukige portalen, zie fig. 1b, c.

Als de constructie dient ter ondersteuning van het dak, spreken we van een *portaalspant* of kortweg *spant*. Hierbij kan de regel ook onder een helling verlopen en/of een knik bezitten, zoals is weergegeven in fig. 2.

Bij éénbeukige portalen en portaalspanten maken we meestal nog een verder onderscheid naar aanleiding van de randvoorwaarden.

Als beide stijlen aan de onderzijde volledig zijn ingeklemd, spreken we van een *volledig ingeklemd portaal*, zie fig. 3a. Deze constructie wordt vooral in de betonbouw toegepast.

Als beide stijlen scharnierend aan de ondergrond zijn bevestigd, spreken we van een *tweescharnierspant*, zie fig. 3b.

Als er bovendien nog een derde scharnier in de regel is aangebracht – meestal in het midden van de overspanning – spreken we van een *driescharnierspant*, zie fig. 3c.

Driescharnierspanten zijn gemakkelijk in twee delen aan te voeren. De constructie is statisch bepaald. Bij een uitvoering in staal worden de twee delen meestal na de montage alsnog buigvast met elkaar verbonden. We hebben dan voor de veranderlijke belasting weer te maken met een statisch onbepaalde constructie.

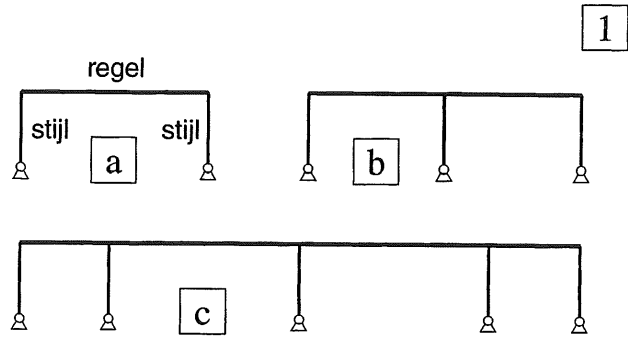


Fig. 1 Portalen

- a. Eénbeukig portaal
- b. Tweebeukig portaal, gelijke overspanningen
- c. Vierbeukig portaal, ongelijke overspanningen

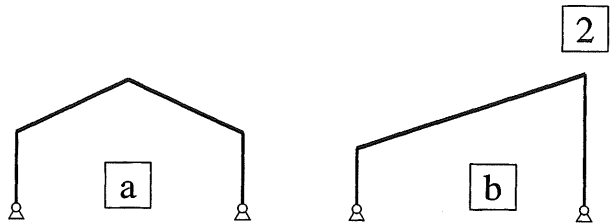


Fig. 2 Spanten met een hellend dakvlak

- a. Symmetrische vorm
- b. Asymmetrische vorm

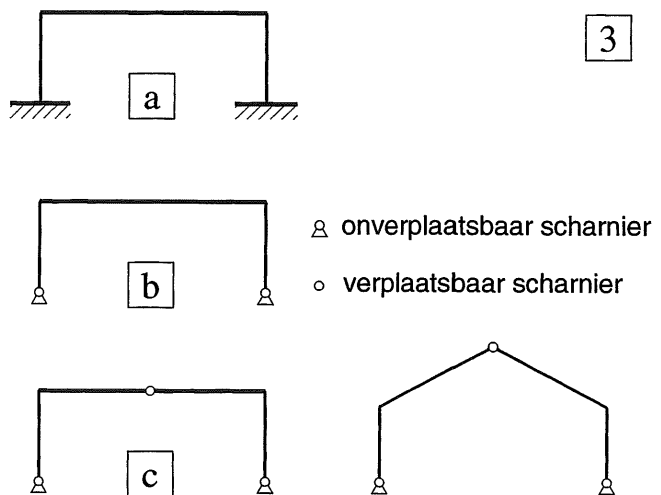


Fig. 3 Randvoorwaarden

- a. Volledig ingeklemd portaal (drievoudig statisch onbepaald)
- b. Tweescharnierspant (éénvoudig statisch onbepaald)
- c. Driescharnierspant (statisch bepaald)

22.3.2 HOOFDKRACHTSWERKING IN PORTALEN

Een eerste indicatie van de krachtswerking in portalen *onderverticale belasting* is reeds verstrekt in KW-3; hoofdstuk 18 [374-399]:

Globale analyse van portalen en raamwerken. Voor twee-scharnierspanten die zijn belast door één verticale puntlast in het midden van de overspanning, is in KW-3 [378-379] een aantal voorbeelden gegeven van het momentenverloop in de stijlen en de regels. Dit blijkt afhankelijk te zijn van de verhouding van de buigstijfheid tussen regel en stijlen.

Bij het overeenkomstige – statisch bepaalde – driescharnierspant is de krachtswerking echter onafhankelijk van de stijfheidsverhouding tussen regel en stijlen. De krachtswerking kan wel worden beïnvloed door de plaats van het scharnier in de bovenregel te variëren [379-1].

De berekening van driescharnierspanten is behandeld in KW-3, paragraaf 18.4 [387-399].

Voor twee- en driescharnierspanten, die zijn belast door een gelijkmatig verdeelde (verticale) belasting op de (horizontale) bovenregel, is in KW-3 [380] eveneens een indicatie gegeven van het momentenverloop. Daar hebben we voor de tweescharnierspanten echter zonder meer *gepooneerd* dat een bepaald momentenverloop moest worden verwacht. Maar met de kennis uit hoofdstuk 21, omtrent vervormingen en het gebruik van gaapvergelijkingen, staan we een stuk sterker. We kunnen de meest voorkomende belastinggevallen op portalen nu zonder veel moeite schematiseren en de krachtswerking berekenen.

De uitgewerkte voorbeelden zijn beperkt tot een tweescharnierspant [550-551] en een volledig ingeklemd portaal [554-555], met een gelijkmatig verdeelde verticale belasting op de bovenregel. Terwille van het inzicht is dit gedaan aan de hand van vergelijkbare doorgaande liggers [548-549]. Om de overeenkomst in resultaten te tonen bij toepassing van vormveranderings-vergelijkingen en bij gebruik van de methode Cross in KW-6, zijn vanaf [548] de formules omgewerkt in een notatie die bij de methode Cross gebruikelijk is. Hierbij wordt gebruik gemaakt van *ligger-stijfheden* – ook aangeduid als *Cross-stijfheden* – in de vorm: $k = \alpha EI/l$. Hierbij hangt de dimensieloze coëfficiënt α af van de randvoorwaarden van de regels en stijlen van het portaal, zoals die zijn weergegeven bij de basisliggers C1, C2 en C3 in [518-519].

Voor praktisch gebruik bij het dimensioneren is deze Cross-notatie echter weer verlaten. Voor beide gevallen zijn eenvoudige expliciete formules voor de momentenverdeling weergegeven in [555-(17)]. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de geometrische stijfheidsverhouding ϑ (theta) volgens onderstaande formule:

$$\vartheta = (EI/l)_2 / (EI/l)_1 \quad (10)$$

waarin: (...₁ = stijl; ...₂ = regel)

Hoewel de methode Cross een numerieke methode is, kunnen voor deze twee eenvoudige portaalvormen eveneens dezelfde gesloten formules worden afgeleid, zie KW-6 [630].

In principe is de methode Cross echter bedoeld voor handberekeningen van wat ingewikkelder spantvormen en belastingen. Uiteraard kan ook van computerprogramma's gebruik worden gemaakt, maar zonder inzicht in de krachtswerking zullen een onjuiste schematisering of foutieve invoergegevens met de bijbehorende onjuiste uitkomsten de gebruiker veelal niet opvallen.

Ten behoeve van het globaal dimensioneren en het voorkómen van veel rekenwerk zullen we in hoofdstuk 28 van KW-6 dit soort gesloten formules op een wat uitgebreider schaal toepassen voor een aantal één- en tweebeukige portalen. In de appendix worden dan zowel de maatgevende momenten als enkele maatgevende verplaatsingen in formulevorm weergegeven voor een verticale werkende q -last dan wel een horizontale puntlast.

De uitkomsten van deze berekeningen zullen mede worden gebruikt voor het inzichtelijk maken van de hoofdkrachtswerking in regelmatige raamwerken in hoofdstuk 29 van KW-6. Voor onregelmatige raamwerken is men echter op computerprogramma's aangewezen.

Een eerste indicatie van de hoofdkrachtswerking bij een *horizontale belasting* op een tweescharnierspant (puntlast op de bovenregel) is weergegeven in KW-3 [359] en [383].

22.4.1 L-VORMIGE LIGGER

Alvorens de krachtswerking in portalen nader te bespreken, zullen we enige aandacht schenken aan de krachtswerking in geknikte liggers.

We beginnen met een ligger A-B-C waarvan de delen A-B en B-C een rechte hoek met elkaar maken. Beide delen zijn volkomen buigvast met elkaar verbonden, zie fig. 1a.

De ligger zelf wordt gewichtloos verondersteld. Op beide uiteinden van de ligger laten we een drukkracht F aangrijpen. Er kan dan alleen maar evenwicht heersen, als de beide krachten langs de werklijn A-C aangrijpen, zie fig. 1a1.

We ontbinden beide krachten vervolgens in hun orthogonale componenten F_V en F_H en tekenen voor beide liggerdelen de normaalkrachtenlijn en de dwarskrachtenlijn, zie fig. 1a2, b.

Hieruit volgt dat de grootte van de normaalkracht $N = F_H$ in liggerdeel A-B overgaat in de dwarskracht $V = F_H$ in liggerdeel B-C.

Op dezelfde wijze gaat de grootte van de dwarskracht $V = F_V$ in liggerdeel A-B, over in de normaalkracht $N = F_V$ in liggerdeel B-C.

De buigende momenten in beide liggerdelen verlopen lineair, zie fig. 1c en 1a2. Ze zijn nul in de uiteinden A en C van de geknikte ligger en bereiken hun maximale waarde in de knik (punt B).

$$M_{\max} = F_V * a = F_H * b = F * c$$

Het moment is aan de buitenzijde van de L-vorm uitgezet met de bijbehorende buigtekens, conform de tekenafspraken van KW-2 [229].

Links en rechts van de knik behoudt het buigend moment hetzelfde teken; dat wil zeggen, drukspanningen en trekspanningen blijven aan dezelfde kant van de neutrale lijn liggen ter weerszijden van de knik. De rechte hoek blijft recht, maar in een tekening lijkt hoek B stomp te zijn bij een uitbuigend moment en scherp bij een inbuigend moment, zie fig. 3a, b. Dit is louter gezichtsbedrog, een buigvervorming als in fig. 3c lijkt een rechte hoek te garanderen, maar is voor het momenten-evenwicht onmogelijk.

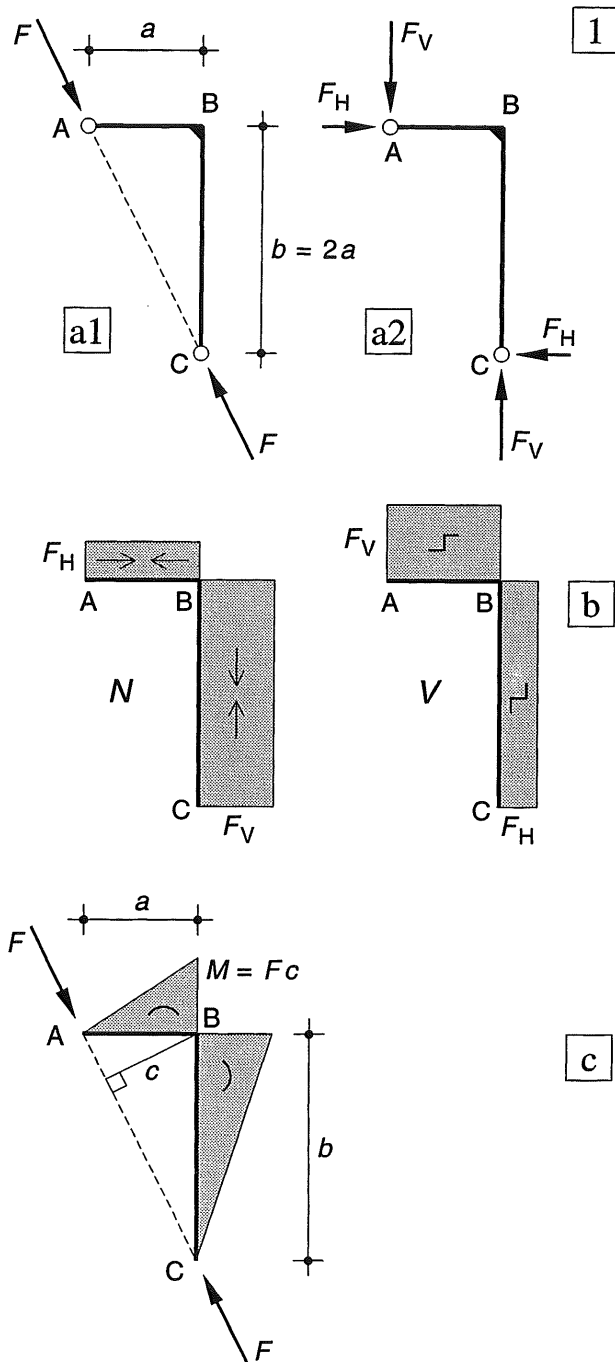


Fig. 1 Geknikte staaf
 a. Schema met drukkrachten op de uiteinden
 b. N - en V -lijn
 c. Momentenlijn

22.4.2 SAMENSTEL KOLOM – LIGGER

Een horizontale ligger A-B-C is in punt B buigvast verbonden aan een kolom B-D, die op zijn beurt in punt D in de vloer is ingeklemd; fig. 2a. Om de diagrammen voor de snedekrachten te kunnen tekenen, bepalen we eerst de oplegreacaties in punt D en brengen vervolgens in enkele markante punten sneden aan.

Verplaatsing van alle krachten op het afgesneden deel naar de beschouwde snede levert de snedekrachten daar ter plaatse, herlees zo nodig KW-2 [220-223]. Desgewenst kunnen we de onderdelen A-B en B-C als liggers beschouwen die zijn ingeklemd in punt B. Voor het deel B-D beschouwen we dan alle krachten op een afgesneden T-vormige deel. In fig. 2 zijn voor drie belastinggevallen de N-, V- en M-lijnen weergegeven.

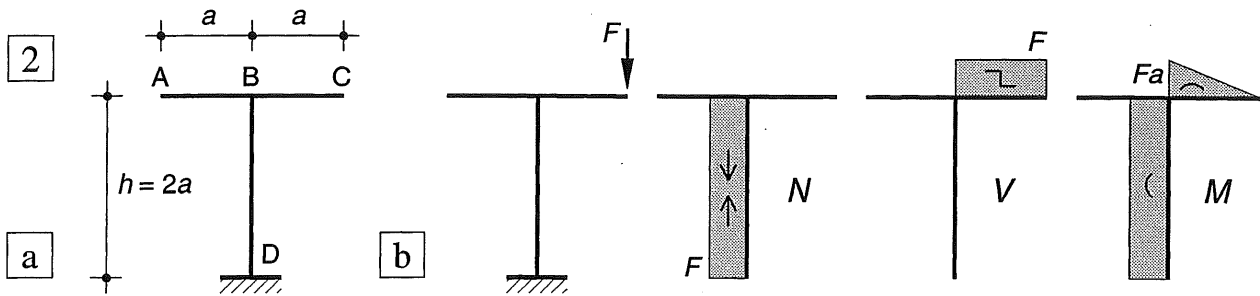


Fig. 2
T-vormige constructie met N-, V- en M-lijnen
a. Afmetingen
b. Asymmetrische verticale puntlast
c. Twee symmetrische verticale puntlasten
d. Asymmetrische schuine puntlast

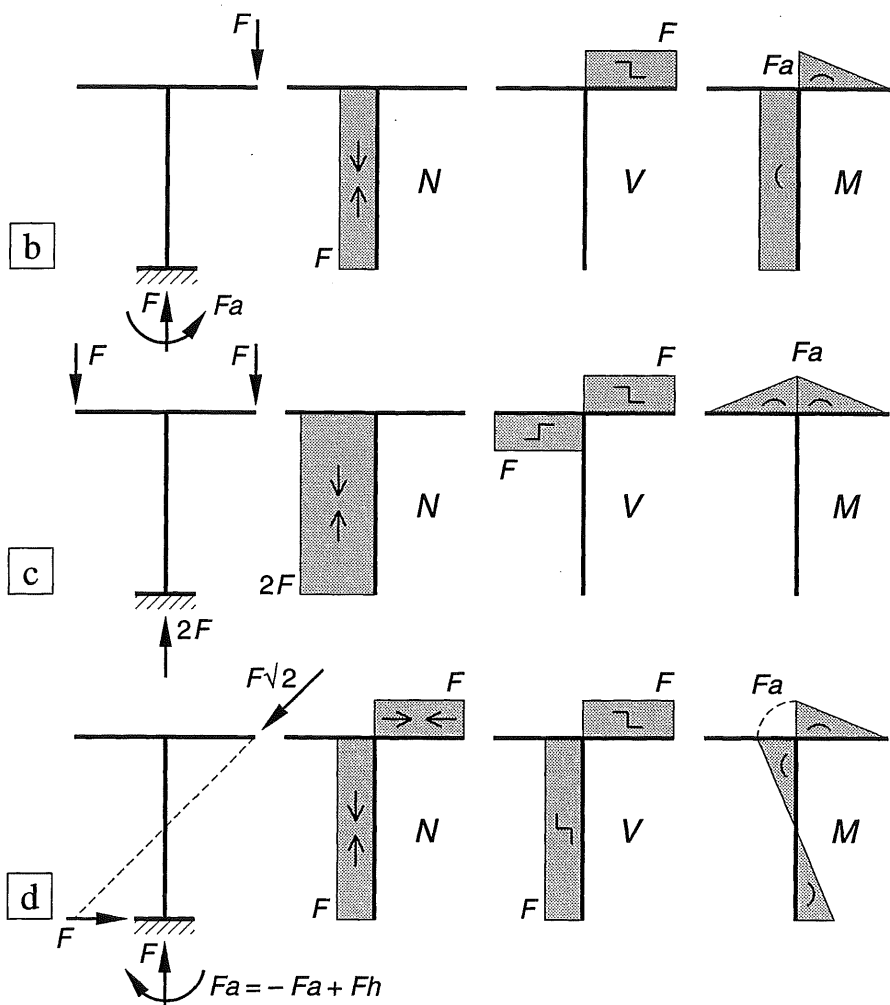
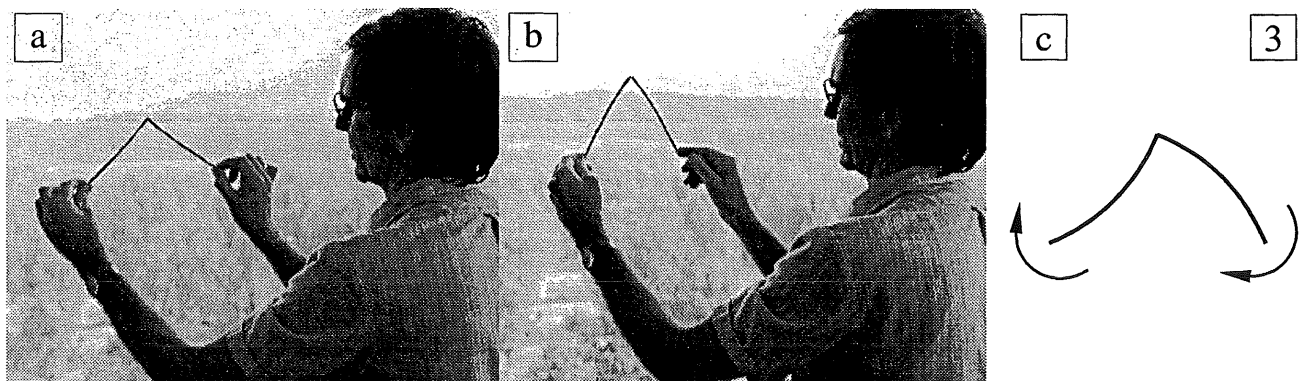


Fig. 3 Vervormingen van een L-vormige staaf
a. Uitbuigend moment
b. Inbuigend moment
c. Vervormingstoestand die uit evenwichtsoverwegingen niet mogelijk is
d. $Fa = -Fa + Fh$



22.4.3 SPANNINGEN TER PLAATSE VAN DE KNIK

In de prismatische liggerdelen kunnen de spanningen ten gevolge van N , V en M op de gebruikelijke wijze worden bepaald. De invloed van de buigspanningen overheerst hierbij.

Over het algemeen zal het buigend moment een lokaal extremum vertonen ter plaatse van de knik in de liggers, zie fig. 1a. We zullen de dimensionering van de *stijl* dan ook veelal op de grootte van dit negatieve inklemmingsmoment baseren. Voor de regel kan ook het positieve veldmoment maatgevend zijn. In beide gevallen volgt de spanningsverdeling uit $\sigma = M * z / I$.

In werkelijkheid vertoont de spanningsverdeling in de hoek vrij grote afwijkingen ten opzichte van dit geïdealiseerde beeld, zie fig. 1b, c waarin alléén de invloed van een constant buigend moment is verdisconteerd. In de doorsneden I en I' op een afstand t (liggerhoogte) vanuit de binnenhoek A blijven vlakke doorsneden nog vlak en volgt de spanningsverdeling uit de hierboven genoemde formule. In de doorsneden II en II' ligt de neutrale lijn echter niet langer ter halverhoogte. Vlakke doorsneden blijven niet langer vlak en de spanningen in de binnenhoek lopen sterk op. In de doorsneden III en III' bevinden we ons aan de buitenzijde van de beschouwde liggerdelen en moeten alle normaalspanningen tot nul zijn afgenomen, zie fig. 1c. In het donker gerasterde hoekgedeelte treedt een gecompliceerde spanningsverdeling op waarbij vlakke doorsneden niet meer vlak blijven. Zo is in de diagonale doorsnede IV de normaalspanning in punt C2 gelijk aan nul, terwijl in de directe omgeving van punt C1 de spanningen weer sterk toenemen, zie fig. 1d1. Maar ook in deze doorsnede geldt dat de totale trekkracht gelijk is aan de totale drukkracht en dat het koppel van deze twee krachten gelijk moet zijn aan het buigend moment M . Bovendien blijken er ook drukspanningen op te treden in de richting van de diagonaal C1-C2, met een spanningspiek in C1; fig. 1d2.

Afhankelijk van de aard van het bouw materiaal (hout, staal of gewapend beton) en de gekozen doorsnede vorm, zal de constructeur maatregelen moeten treffen om een goede krachtsoverdracht in de hoek te waarborgen.

Voor hout en beton komen we daar later nog op terug, voor staal geven we alvast enige indicaties. Voor constructie-details raadplege men het dictaat DRAAGCONSTRUCTIES II.

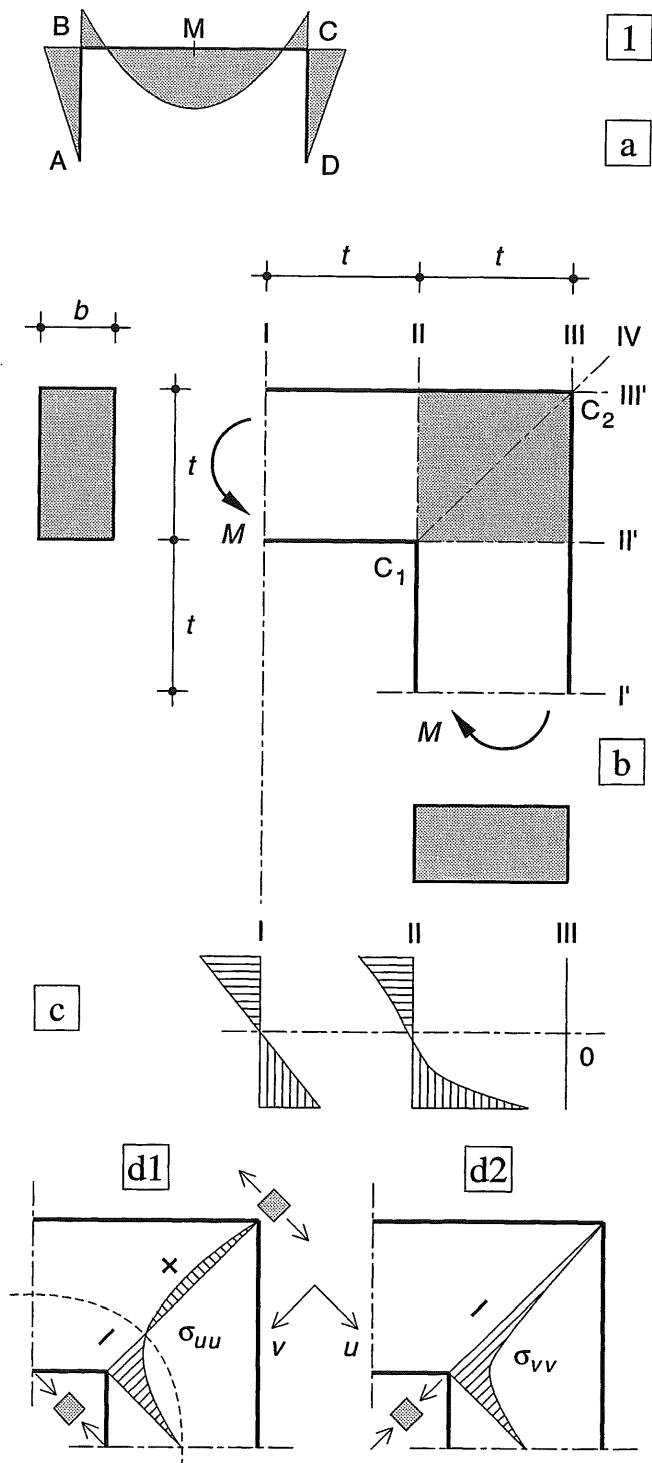


Fig. 1 Spanningsverdeling ter plaatse van een knik in een ligger (rechthoekige doorsnede)

- Momentenverloop in een portaal; lokale extrema in de hoeken B en C en in het midden M
- Ligging van de diverse doorsneden
- Spanningsverloop in de doorsneden I, II, III
- Spanningsverloop in de diagonale doorsnede IV

Staal

Bij de aansluiting van twee I-profielen – die een moment van enige betekenis moeten overbrengen – is het vrij gebruikelijk om zodanige maatregelen te nemen, dat de flenzen van beide liggers als het ware doorlopen. Dit is sterk vereenvoudigd weergegeven in fig. 2a.

In fig. 2b is de elementair berekende buigspanningsverdeling in het I-profiel weergegeven, die ontstaat als we op elke ligger een constant buigend moment laten aangrijpen. Voorts is de daaruit volgende grootte van de krachten in de flenzen en het lijf weergegeven.

Als we dan het evenwicht beschouwen van het gerasterde deel van het lijf tussen de vier 'flenzen', dan zien we dat – na het verschuiven van de uitwendige krachten uit fig. 2c1 – dit onderdeel vrijwel is onderworpen aan zuivere afschuiving, zie fig. 2c2. Daardoor zullen in u -richting trekspanningen ontstaan en in v -richting drukspanningen, zoals blijkt uit fig. 2c3 (KW-4 [413]). Aangezien alle krachten uit de flenzen als het ware 'wegvloeien' en via het lijf moeten worden omgeleid, zal het gerasterde deel van het lijf vrijwel altijd moeten worden verzwaaard.

Een duurdere, maar veel elegantere oplossing is weergegeven in fig. 2d. Hier is alleen een schotje in de richting van de diagonaal aangebracht.

De krachten vanuit de flenzen (en het lijf) worden twee aan twee samengesteld en maken via het extra schotje precies evenwicht met elkaar, zie fig. 2e.

Bij een 'inbuigend' moment treden hier drukkrachten in op en bij een 'uitbuigend' moment trekkrachten.

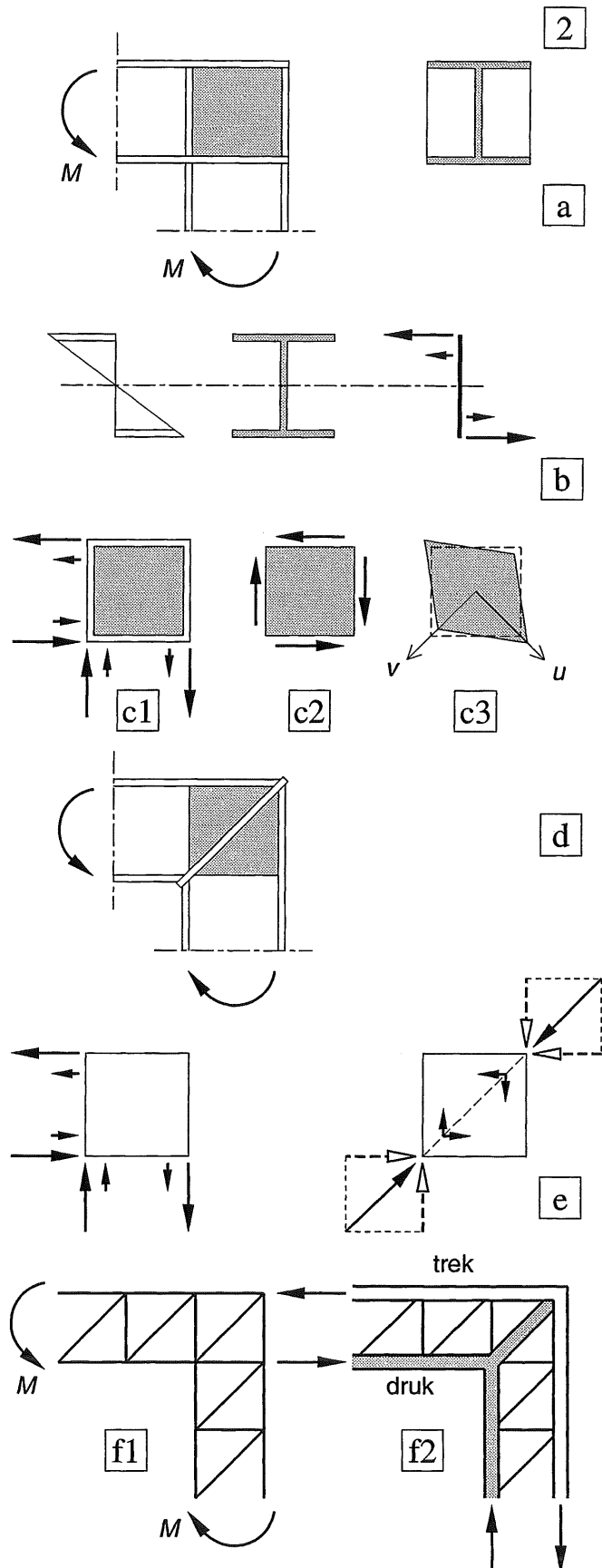
Ter verduidelijking is in fig. 2f1 nog een stukje weergegeven van een geknikt vakwerk, dat is onderworpen aan een constant buigend moment.

Alle diagonalen en verticalen blijken nulstaven te zijn, behalve de diagonaal ter plaatse van de hoek, zie fig. 2f2.

Vergelijk ook de staafkrachten in vakwerken waarvan de buitenrand is geknikt, zie KW-3 [352-353].

Oplossingen voor gewapend beton en hout worden behandeld in KW-8.

Fig. 2 Loodrechte aansluiting van twee I-profielen
 a. 'Doorlopende' flenzen (inbuigend moment)
 b. Buigspanningsverdeling met de bijbehorende krachten
 c. Evenwicht van het lijf tussen de flenzen (en de schotjes)
 d. Schotjes in de richting van de diagonaal (uitbuigend moment)
 e. Evenwicht van krachten
 f. Geknikt vakwerk, onderworpen aan een constant uitbuigend moment, met de daaruit volgende staafkrachten



22.5.1 GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING

Verreweg de belangrijkste belasting voor portalen is de gelijkmatig verdeelde verticale belasting van de bovenregel. Het eigen gewicht van de *regel* is vrijwel altijd gelijkmatig verdeeld en voor de veranderlijke belasting mogen we dit volgens de voorschriften aannemen, zie fig. 1a. De onderdelen die op het portaal rusten, vormen een belasting die continu kan aangrijpen (vloer of vloerplaten) of puntsgewijs op regelmatige afstanden (dwarsliggers of gordingen), zie fig. 1b. In beide gevallen kunnen we van een gelijkmatig verdeelde belasting uitgaan. De invloed van deze belasting op de *regel* overheerst zozeer, dat we het eigen gewicht van de *stijlen* in de berekening vrijwel altijd verwaarlozen. Ook de invloed van het eigen gewicht van de regel wordt veelal pas achteraf gecontroleerd.

Bij een geometrisch symmetrische constructie die ook symmetrisch is belast, zal de bovenregel wel doorbuigen, maar niet zijdelings verplaatsen, zie fig. 2a. De berekening van een portaal is dan even eenvoudig als die van een doorgaande ligger met drie velden, zie fig. 2b [548].

Bij geometrisch asymmetrische constructies en/of asymmetrische belastingen zoals in fig. 2c kunnen wél zijdelingse verplaatsingen optreden. Daardoor wordt een handberekening een stuk omslachtiger en valt buiten het kader van KW-5.

In KW-6 hoofdstuk 27 [638-645] wordt dit probleem opgelost met behulp van de (iteratie-)methode Cross voor verplaatsbare knooppunten.

In KW-6 hoofdstuk 28 daarentegen worden voor één- en tweebeukige portalen langs analytische weg expliciete formules afgeleid voor de momenten en verplaatsingen in enkele maatgevende punten.

Over het algemeen zijn echter ook computerprogramma's beschikbaar, waarmee dergelijke gevallen snel kunnen worden berekend.

Hier staat tegenover dat een dergelijke zijdelingse verplaatsing in veel gevallen wordt verhinderd door andere stijve gebouwdelen of door schoren. In zo'n geval kunnen we de berekening van asymmetrische constructies en asymmetrische belastingen weer wat gemakkelijker aan, zie bijv. KW-6 [632-637].

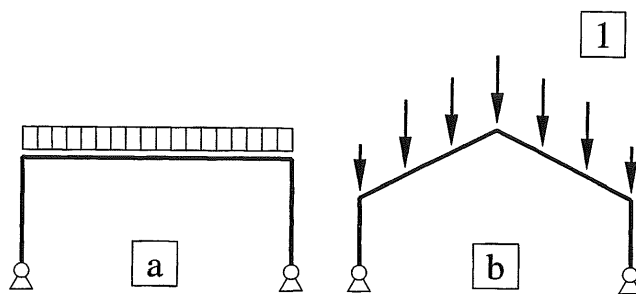


Fig. 1 Verticale belasting op portalen
a. Belasting op de bovenregel gelijkmatig verdeeld
b. Belasting op de bovenregel geconcentreerd op regelmatige afstanden

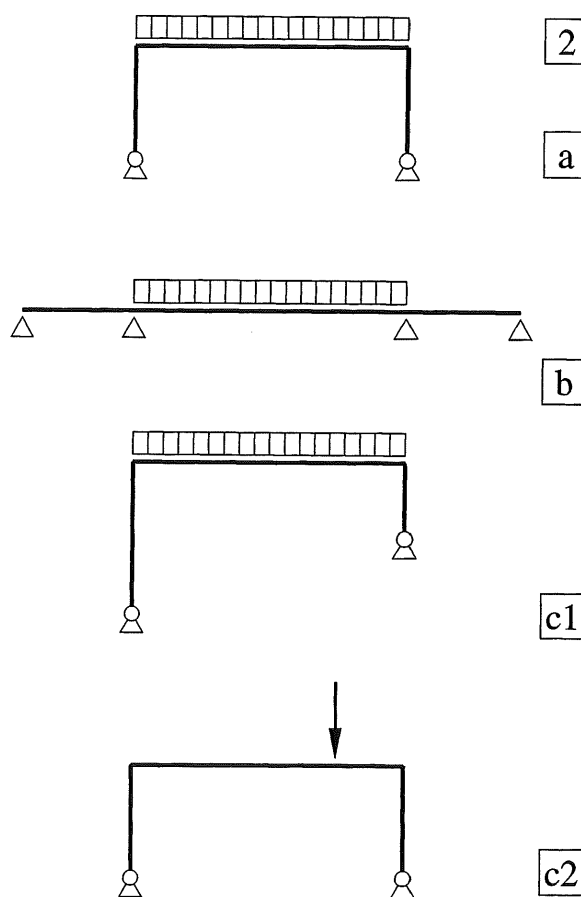


Fig. 2 Vervorming van portalen
a. Symmetrisch portaal, symmetrisch belast
b. Doorgaande ligger, symmetrische belast
c1. Portaal asymmetrisch, belasting symmetrisch ten opzichte van de ondersteuning
c2. Belasting asymmetrisch, portaal symmetrisch

Overeenkomsten in de momentenverdeling bij portalen en doorgaande liggers

Berekening tweescharnierspant: [550-551]
Berekening ingeklemd portaal: [554-555]

De bepaling van de momentenverdeling blijkt min of meer overeenkomstig te verlopen bij de onderstaande portaalconstructies:

1. tweescharnierspant
2. volledig ingeklemd portaal

Als inleiding tot deze berekening zullen we in [548-549] eerst de momentenverdeling bepalen in twee doorgaande liggers over vier steunpunten, zie fig. 3a2, b2. We zullen aantonen dat de momentenverdeling in deze liggers zonder meer ook geldig is voor de overeenkomstige portalen van fig. 3a1, b1.

Driescharnierspanten

Driescharnierspanten zijn statisch bepaald, zodat de krachtwerving niet door de vervormingen wordt beïnvloed. Hierdoor wijkt de wijze van berekenen duidelijk af van die voor de hiernaast genoemde portalen. Driescharnierspanten zijn behandeld in KW-3 [387-399].

Direct toepasbare formules voor het overgangsmoment M_1 zijn voor beide gevallen weergegeven in: [555]

Bij het toepassen van vormveranderingsvergelijkingen zijn de uitkomsten altijd in een expliciete formulevorm weer te geven.

De afleidingen zijn ter wille van het inzicht gegeven en aan de hand van het dictaat betrekkelijk gemakkelijk te volgen.

Van de studenten wordt niet verwacht dat zij dit soort berekeningen zelf zullen uitvoeren.

Zij moeten echter wel gebruik kunnen maken van de gegeven uitkomsten, zoals die bijv. in de appendix van KW-6 zijn weergegeven.

Het betreft de maatgevende momenten en de maximale vervormingen van één- en tweebukige portalen, zowel voor een verticaal werkende q -last als voor een horizontale puntlast ter hoogte van de bovenregel.

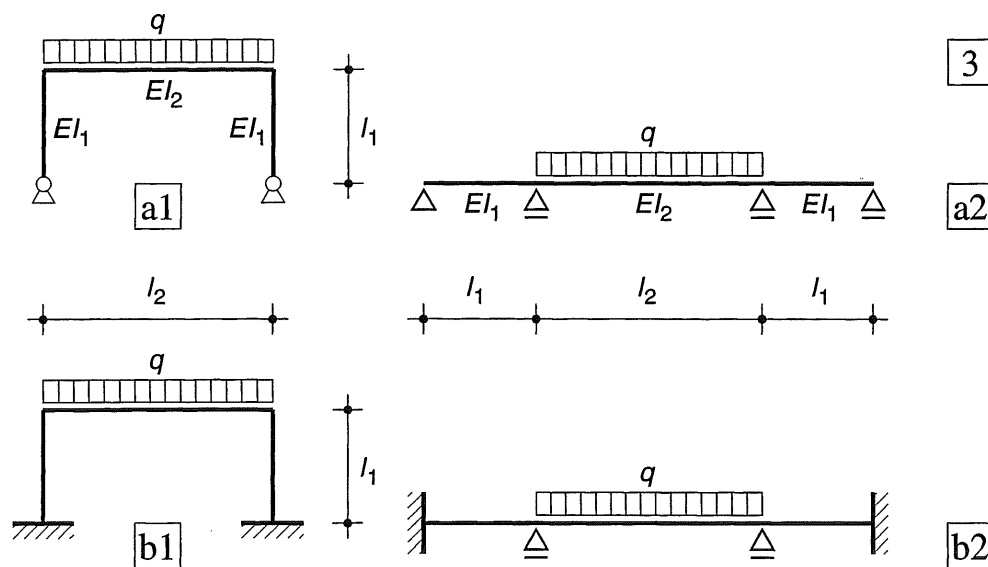


Fig. 3 Overeenkomstige momentenverdeling bij portalen en liggers over 4 steunpunten

- | | | | |
|----|----------------------------|----|--|
| a1 | Tweescharnierspant | a2 | Overeenkomstige ligger met dezelfde momentenverdeling als a1 |
| b1 | Volledig ingeklemd portaal | b2 | Overeenkomstige ligger met dezelfde momentenverdeling als b1 |

22.5.2 SYMMETRISCHE LIGGER MET ONBELASTE BUITENVELDEN

We beschouwen een doorgaande ligger met drie velden volgens fig. 1a. De buitenvelden (1) zijn onbelast en bezitten dezelfde stijfheid en overspanning. Het middenveld (2) is belast door een gelijkmatig verdeelde belasting q_2 en bezit een stijfheid en een overspanning, die afwijken van die van de buitenvelden.

Als we het statisch bepaalde hoofdsysteem in fig. 1b beschouwen, dan blijkt dat alleen het middenveld doorbuigt onder de uitwendige belasting, zodat alleen de uiteinden van deze ligger hoekverdraaiingen ondergaan.

Er is dan maar één onbekend overgangsmoment M_1 in de punten B en C nodig om de gapingen te sluiten. De gaapvergelijking voor punt B volgt rechtstreeks uit de formules in [533-2f] door te stellen: $q_1 = 0$ en $M_2 = M_1$.

$$\frac{q_2 l_2^3}{24 EI_2} = \frac{M_1 l_1}{3 EI_1} + \frac{M_1 l_2}{3 EI_2} + \frac{M_1 l_2}{6 EI_2} \quad (1a)$$

Als we de laatste twee termen achter het gelijkteken samenvoegen gaat formule (1a) over in:

$$\frac{q_2 l_2^3}{24 EI_2} = \frac{M_1 l_1}{3 EI_1} + \frac{M_1 l_2}{2 EI_2} \quad (1b)$$

Ter vereenvoudiging voeren we de volgende grootheden in, die we als liggerstijfheid zullen aanduiden (ook wel Cross-stijfheid genoemd):

$$k_1 = \frac{3 EI_1}{l_1} \quad k_2 = \frac{2 EI_2}{l_2} \quad (2a)$$

Als we de formules (2a) substitueren in (1b), volgt:

$$\frac{q_2 l_2^2}{12 k_2} = \frac{M_1}{k_1} + \frac{M_1}{k_2} = M_1 \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \quad (1c)$$

We voeren nu de factor μ in volgens:

$$\mu = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \quad (3)$$

Formule (1c) gaat dan over in:

$$M_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{q_2 l_2^2}{12} = \mu \frac{q_2 l_2^2}{12} \quad (4)$$

Op deze manier hebben we in één simpele formule – voor elke verhouding van de liggerstijfheden – het overgangsmoment M_1 bepaald.

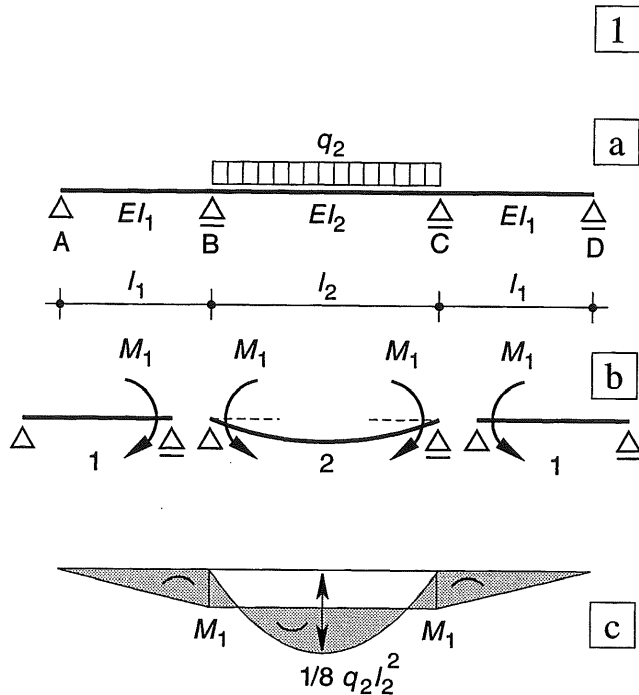


Fig. 1 Ligger met drie velden, middenveld belast; eindsteunpunten scharnierend

- Schema voor de ligger
- Schema voor de berekening van M_1
- Momentenlijn

□ De factor μ geeft een stijfheidsverhouding aan. Bij de methode Cross in KW-6 wordt deze coëfficiënt aangeduid als de vereffeningscoëfficiënt. Het navolgende legt de verbinding met de methode Cross.

De liggerstijfheid k is uitsluitend gerelateerd aan de maximale hoekverdraaiing die ontstaat onder invloed van één overgangsmoment (ligger 1), resp. twee overgangsmomenten (ligger 2). De liggerstijfheid voor veld 1 volgt direct uit de maximale hoekverdraaiing van basisligger C1 [518]. De liggerstijfheid voor veld 2 volgt direct uit de maximale hoekverdraaiing van basisligger C2 [519].

Voor ligger 1 van fig. 1b geldt:

$$\varphi_{\max} = \frac{K l_1}{3 EI_1} \quad \text{waaruit volgt: } K = \frac{3 EI_1}{l_1} \varphi_{\max} \quad (5a)$$

De liggerstijfheid $k_1 = 3 EI_1/l_1$ blijkt dus gelijk te zijn aan het uitwendige moment K dat nodig is om de maximale hoekverdraaiing in punt B gelijk aan 1 te maken,

Voor ligger 2 van fig. 1b geldt:

$$\varphi_{\max} = \frac{K l_2}{2 EI_2} \quad \text{waaruit volgt: } K = \frac{2 EI_2}{l_2} \varphi_{\max} \quad (6)$$

De liggerstijfheid is dus gelijk aan:

$$k_2 = 2 EI_2/l_2$$

Buitenvelden aan de uiteinden ingeklemd

Bij de ligger van fig. 2a zijn de scharnierende opleggingen bij A en D van fig. 1a vervangen door volledige inklemmingen. Dus alleen voor veld 1 zijn de randvoorwaarden veranderd en hiervoor geldt basisbelastinggeval C3 [519]. Voor ligger 1 geldt $K = M_1$, zodat:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_1 l_1}{4 EI_1} \text{ waaruit volgt } M_1 = \frac{4 EI_1}{l_1} \varphi_{\max} \quad (5b)$$

De liggerstijfheid voor ligger 1 is dus gelijk aan:

$$k_1 = 4 EI_1 / l_1$$

De liggerstijfheid k_2 is onveranderd gebleven.

De gehele verdere afleiding ondergaat dan geen verandering als we nu voor k substitueren:

$$k_1 = \frac{4 EI_1}{l_1} \quad k_2 = \frac{2 EI_2}{l_2} \quad (2b)$$

Voor de situatie: $EI_2 = 4 EI_1$ en $l_2 = 2 l_1$, zijn de momentenlijnen voor beide gevallen weergegeven in fig. 3.

De afleiding van de formules met behulp van de zgn. liggerstijfheden k is om twee redenen uitgevoerd:

1. De grootte van het overgangsmoment $M_1 = \mu * ql^2/12$ is in deze algemene vorm gemakkelijk te onthouden.
2. In deze schrijfwijze komen de uitkomsten geheel overeen met die volgens de methode Cross, die in KW-6 wordt behandeld.

Het nadeel van de bovenstaande schrijfwijze is dat voor elk geval de grootte van μ afzonderlijk moet worden berekend.

Daarom is in [555] voor de twee besproken gevallen de factor μ rechtstreeks uitgedrukt in de afmetingen l en de buigstijfheden EI van de lijnvormige constructiedelen. Daarbij is het begrip *geometrische liggerstijfheid* geïntroduceerd voor de verhouding EI/l . In de formules wordt dan gebruik gemaakt van de factor ϑ die de verhouding aangeeft tussen de liggerstijfheid van regel en stijl volgens [555-(16)].

Fig. 3 Momentenlijnen voor de gevallen die zijn weergegeven in fig. 1 en 2 uitgaande van: $EI_2 = 4 EI_1$ en $l_2 = 2 l_1$

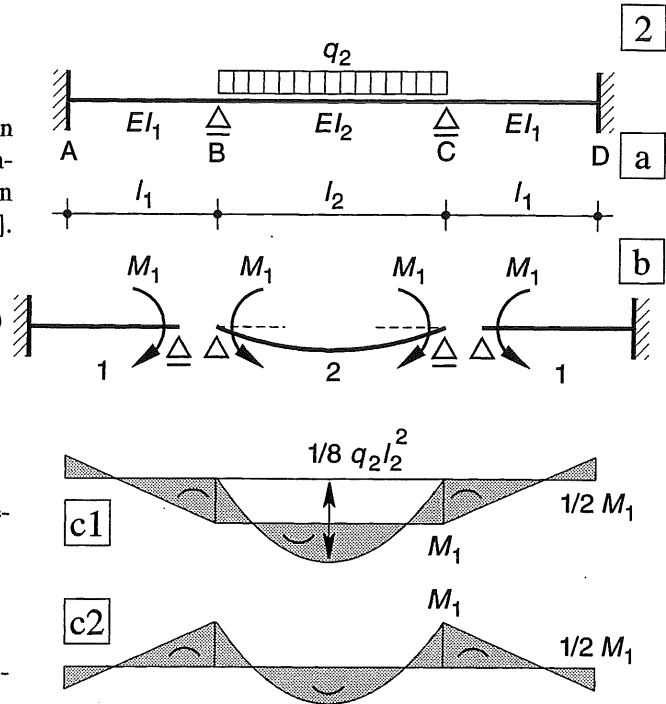
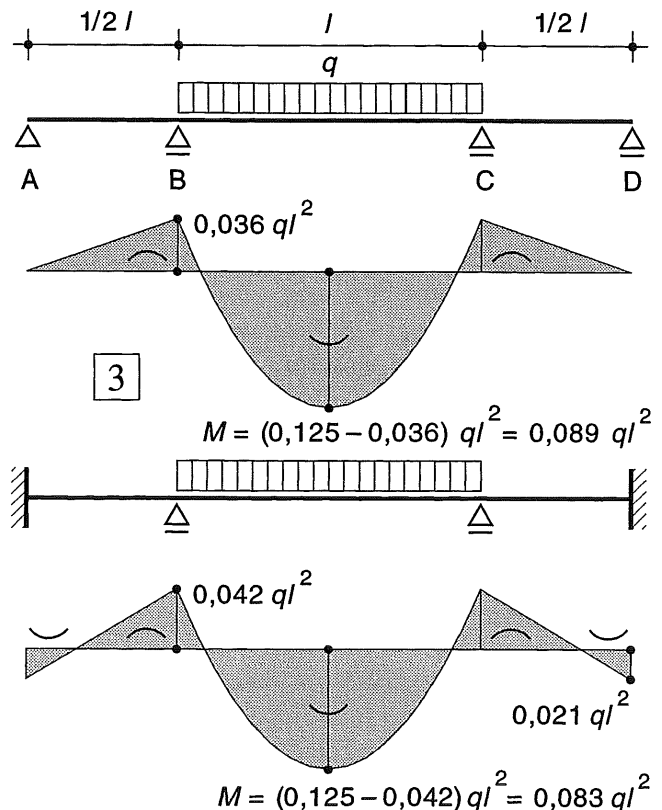


Fig. 2 Ligger met drie velden, middenveld belast, eindsteunpunten volledig ingeklemd

- a. Schema voor de ligger
- b. Schema voor de berekening van M_1
- c1 Momentenlijn bepaald door superpositie
- c2 Dezelfde momentenlijn met horizontale nullijn



22.5.3 TWEESCHARNIERSPANT

Een tweescharnierspant kan op een overeenkomstige wijze worden berekend als een doorgaande ligger, door de stijlen en de regels elk weer als een ligger op twee steunpunten te beschouwen, zie fig. 1.

Het tweescharnierspant A-B-C-D van fig. 1a is in fig. 1b vervangen door drie vrij opgelegde liggers A-B, B-C en C-D.

De scharnieren A en D – die aan de bodem zijn bevestigd en dus niet kunnen verplaatsen – zijn hierbij aangegeven door een driehoekje met een rondje er bovenop.

De scharnieren B en C die wèl kunnen verplaatsen, zijn aangegeven met een rondje, zie fig. 1b. In deze vorm is de constructie instabiel en valt zonder meer om. Om de zaak weer stabiel te maken is daarom een horizontale pendelstaaf in punt C aangebracht, zie fig. 1c.

Momentenverdeling

In de onbelaste toestand zijn de hoeken B en C beide rechte hoeken. Als we de bovenregel B-C belasten, ondergaan de uiteinden van de ligger B-C gelijke hoekverdraaiingen. De grootte hiervan bedraagt, zie fig. 1d:

$$\varphi_2 = q_2 l_2^3 / 24 EI_2$$

De liggers A-B en C-D worden niet loodrecht op hun vlak belast en blijven dus recht ($\varphi_1 = 0$).

De rechte hoeken bij B en C worden dus elk een hoekje φ_2 kleiner. Om deze verkleining van de rechte hoek weer op te heffen, worden in de punten B en C momenten M_1 aangebracht, die paarsgewijs op de verticale en de horizontale ligger aangrijpen, zie fig. 1e.

Op precies dezelfde wijze als in [548] kan dan een gaapvergelijking worden opgesteld, die aangeeft dat de verkleining van de rechte hoek ten gevolge van de q -last, moet worden geëlimineerd door de vergroting van de rechte hoek onder invloed van de buigende momenten M_1 (zie de formules (1a) t/m (1c) van [548]).

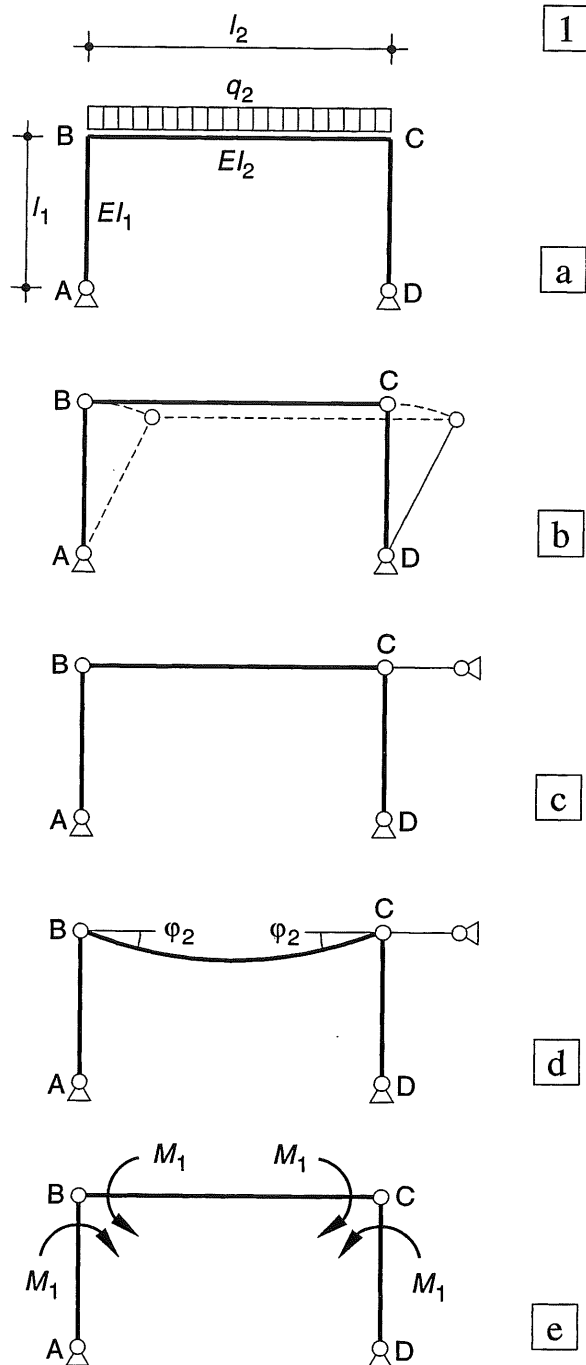


Fig. 1 Tweescharnierspant

- Schema
- Splitsen in drie vrij opgelegde liggers (labiel evenwicht)
- Aanbrengen van een pendelstaaf voor het verzorgen van de stabiliteit
- Vervormingen
- Momenten om de gapingen weer te sluiten

Reactiekrachten

We moeten dan wel nagaan op welke wijze de bijbehorende oplegreacties van de drie liggers – hetzij rechtstreeks, hetzij via de andere liggers – uiteindelijk de ondergrond bereiken, zie fig. 2. De q -last op ligger B-C veroorzaakt de volgende reacties: $R_{BV} = R_{CV} (= R_V) = 1/2 q_2 l_2$. Deze reactiekrachten worden rechtstreeks via de liggers (eigenlijk staven) B-A en C-D als normaalkrachten naar de vaste scharnieren A en D afgevoerd, zie fig. 2b.

De beide momenten M_1 op de ligger B-C houden elkaar in evenwicht en veroorzaken dus geen reactiekrachten, zie [519]; basisligger C2.

Het moment M_1 op de stijlen B-A en C-D veroorzaakt voor elke stijl de horizontale reactiekrachten $R_H = M_1/l_1$ en wel in de richtingen zoals die in fig. 2c zijn weergegeven.

De krachten $R_{BH} = R_{CH}$ zijn gelijk en tegengesteld gericht en maken via de regel B-C evenwicht met elkaar. Hieruit volgt dat de pendelstaaf in punt C geen krachten hoeft op te nemen en kan worden weggelaten.

De stabiliteit is verzekerd, omdat na het sluiten van de gaping, de buigvaste verbindingen in B en C immers weer zijn hersteld.

De horizontale krachten R_{AH} en R_{DH} worden rechtstreeks door de vaste scharnieren A en D opgenomen.

Deze aanpak lijkt wat ingewikkelder dan die van KW-3 [374-380], waar het portaal in principe statisch bepaald is gemaakt door het scharnier in punt D te vervangen door een rol die dan zijdelings verplaatst. Na het terugdrukken van de rol naar zijn oorspronkelijke stand volgt dan de krachtsafdracht in het tweescharnierspant.

Qua methode is dit zeer inzichtelijk; de berekening met behulp van gaapvergelijkingen blijkt echter wat gemakkelijker te verlopen.

In fig. 2e is het verloop van het buigend moment weergegeven voor dezelfde waarde van de stijfheidsfactor μ als in fig. [549-3a].

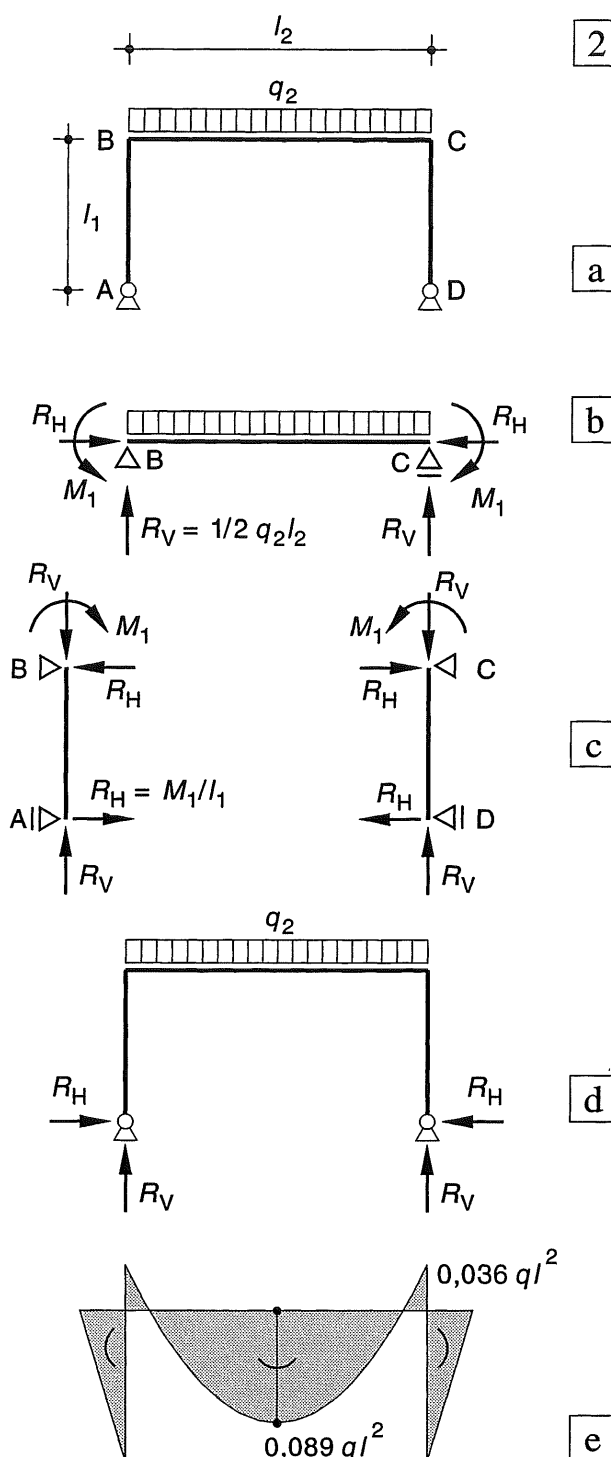


Fig. 2 Afvoer van de reactiekrachten

- Schema
- Reactiekrachten op de regel
- Reactiekrachten op de stijlen
- Reactiekrachten op het spant
- Momentenverloop voor $\mu = 3/7$

22.5.4 VRIJ OPGELEGDE LIGGER OP TWEE INGEKLEMDE STIJLEN

In fig. 1a is een volledig ingeklemd portaal weergegeven. Voor de berekening vervangen we de stijve hoeken B en C weer door scharnieren, zie fig. 1b. De volledige inklemmingen ter plaatse van de punten A en D blijven gehandhaafd.

Aangezien de constructie ook in deze vorm al volledig stabiel is, zullen we eerst hiervan de krachtwerving onderzoeken. Pas in [554] zullen we de verkleiningen van de rechte hoeken B en C weer opheffen om een volledig ingeklemd portaal te verkrijgen.

Als de scharnieren B en C zich in de hartlijnen bevinden van de liggers (staven) B-A en C-D, zoals is weergegeven in fig. 1c, dan worden de stijlen alleen op centrische druk belast.

De ligger B-C gedraagt zich dan als een vrij opgelegde ligger onder gelijkmatig verdeelde belasting met als moment $M_{\max} = 1/8 q_2 l_2^2$.

In de praktijk worden vrijwel nooit echte scharnieren aangebracht. Het schema van fig. 1b wordt echter ook gebruikt voor de situatie dat een houten balklaag rechtstreeks rust op twee gemetselde muren, zie fig. 2a1. Ten gevolge van de doorbuiging van de balken (ligger B-C) zullen deze de neiging hebben om op de randen van de muren te gaan rusten, zie fig. 2a2. Hierdoor worden de muren excentrisch belast. Als gevolg van de wrijving zullen de balken echter niet over de muren verschuiven.

Toch ontstaat er geen constant buigend moment over de gehele hoogte van de muur, zoals men oppervlakkig gezien zou verwachten; fig. 2b1-2. Door de excentrisch aangrijpende krachten op beide muren zouden deze naar elkaar toe willen verplaatsen. Maar dit is niet mogelijk omdat ze door de balken op gelijke afstand worden gehouden. Daardoor kan alleen maar een momentenverdeling optreden volgens belastinggeval C3 [519], zie fig. 2b3. De druklijn zal in het extreme geval verlopen zoals in fig. 2b4 is aangegeven.

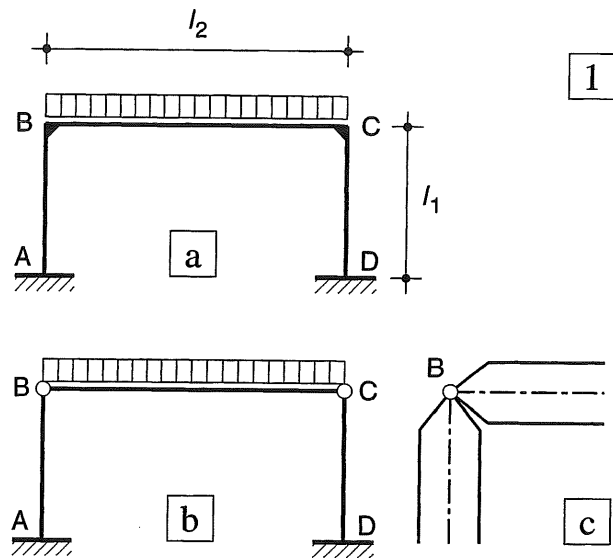


Fig. 1 Volledige inklemmingen aan de voet
 a. Volledig ingeklemd portaal
 b. Ligger rustend op twee kolommen
 c. Scharnier in de kruising van de hartlijnen

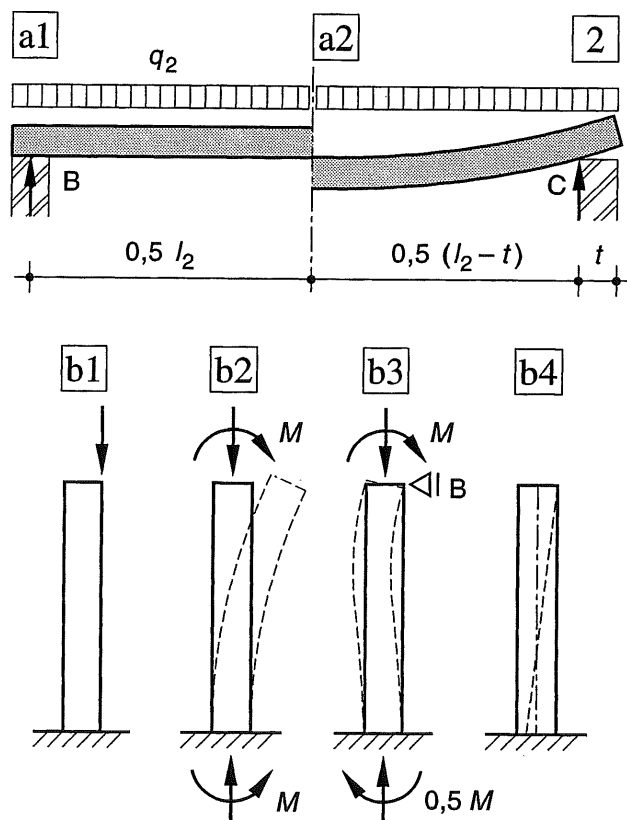


Fig. 2 Houten balklaag op gemetselde muren
 a. Onvervormde (a1) en vervormde (a2) toestand
 b. Krachten op de muur
 b1 Excentrische belasting = (zie b2)
 b2 Centrische belasting + moment
 b3 Evenwicht bij een onverschuifbaar punt B
 b4 Ligging van de druklijn (extreme situatie)

□ Werklijnen van de reactiekrachten

Om te zien of de extreme situatie volgens [552] zal optreden, bepalen we eerst de hoekverdraaiingen φ_2 van de ligger B-C ter plaatse van de opleggingen. Deze hoekverdraaiing is weinig gevoelig voor de preciese plaats van de oplegreactie. De overspanning kan immers alleen maar variëren tussen l_2 en $(l_2 - t)$ zie fig. 2a1-a2.

Voorlopig gaan we uit van de eerstgenoemde waarde:

$$\varphi_2 = \frac{q_2 l_2^3}{24 E_2 I_2} \quad (7)$$

Vervolgens berekenen we de rotatie φ_1 van de stijlen B-A en C-D ter plaatse van hun bovenzijde, ten gevolge van een excentriciteit e . Uit geval C3 [519] volgt voor φ_1 , met inachtneming van de betrekking:

$$K = R_V * e = \frac{1}{2} q_2 l_2$$

$$\varphi_1 = \frac{K l_1}{4 E_1 I_1} = \frac{R_V * e * l_1}{4 E_1 I_1} = \frac{q_2 l_2 l_1}{8 E_1 I_1} e \quad (8)$$

De waarde van e volgt door de formules (7) en (8) aan elkaar gelijk te stellen

$$e = \frac{1}{3} \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \frac{l_2}{l_1} l_2 = \frac{l_2}{3 \vartheta} \quad (9)$$

Ter afkorting is in formule (9) de stijfheidsverhouding ϑ ingevoerd, die we ook in [555] zullen gebruiken.

$$\vartheta = \frac{E_2 I_2 / l_2}{E_1 I_1 / l_1} \quad (10)$$

Formule (9) heeft alleen betekenis als e kleiner is dan de halve muurdikte. Voor een grotere waarde van e zullen de balken inderdaad op de binnenranden van de muren gaan rusten en ontstaat het maximaal mogelijke buigende moment in de muren. De onaangename consequenties hiervan zijn uiteengezet in DRAAGCONSTRUCTIES I.

Numerieke uitwerking

De controle van het bovenstaande is uitgevoerd voor een houten balklaag op een halfsteensmuur (binnenblad van een spouwmuur) zie fig. 3:

Houten balklaag (met indices 2):

dagmaat $(4,50 - 0,10)$ m = 4,40 m

balken h.o.h. 800 mm; $A = 80 \times 180$ mm²

$E_h = 10\,000$ N/mm²

Gemetselde wand (met indices 1):

$h = 2,80$ m; $t = 100$ mm; $E_m = 8\,000$ N/mm²

De strookbreedte b_1 wordt gelijk gekozen aan de h.o.h. afstand van de houten balken.

$I_2 = 1/12 * 80 * 180^3 = 38\,880 * 10^3$

$I_1 = 1/12 * 800 * 100^3 = 66\,667 * 10^3$

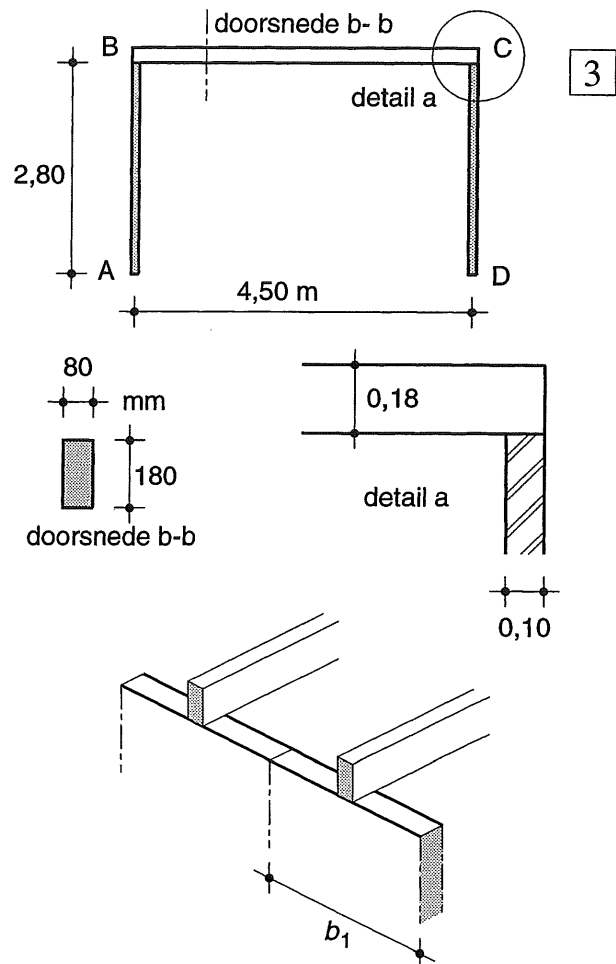


Fig. 3 Bepaling van de excentriciteit e bij een houten balklaag op een halfsteensmuur

De waarde van de factor ϑ bedraagt:

$$\vartheta = \frac{E_2 I_2}{l_2} \frac{l_1}{E_1 I_1} = \frac{10\,000 * 38\,880}{4400} \frac{2800}{8000 * 66\,667}$$

$$\vartheta = 0,46$$

De benodigde excentriciteit e volgt uit (9)

$$e = \frac{4,40}{3 * 0,46} = 3,18 \text{ m}$$

Aangezien e veel groter is dan de halve muurdikte, zullen de balken op de rand van de muur willen dragen.

De oplegreactie werkt loodrecht op de vezelrichting van de houten balken. In deze richting kan hout gemakkelijk worden ingedrukt, we moeten hier namelijk rekening houden met een elasticiteitsmodulus van 330 N/mm² dat wil zeggen 3% van de waarde in langsrichting. Hierdoor zal de oplegreactie over een wat groter gebied worden gespreid.

22.5.5 VOLLEDIG INGEKLEMD PORTAAL

We baseren ons nu weer op een portaal met buigstijve hoeken in de punten B en C, zie fig. 1a. De eerste stap is het aanbrengen van scharnieren in deze punten, zie fig. 1b. Door de belasting vervormt de bovenregel, zie fig. 1c. Om de oorspronkelijke toestand te herstellen moeten de verkleiningen van de rechte hoeken in de punten B en C weer worden opgeheven. We doen dit door in deze punten buigende momenten M_1 op de aangrenzende ligger-uiteinden aan te brengen, zie fig. 1d.

Wellicht ten overvloede is de afleiding van de formules voor de buigende momenten hieronder nogmaals weergegeven, vergelijk [549].

Gaapvergelijking voor punt B:

$$\frac{q_2 l_2^3}{24 EI_2} = \frac{M_1 l_1}{4 EI_1} + \frac{M_1 l_2}{3 EI_2} + \frac{M_1 l_2}{6 EI_2} \quad (11)$$

ofwel:

$$\frac{q_2 l_2^3}{24 EI_2} = \frac{M_1 l_1}{4 EI_1} + \frac{M_1 l_2}{2 EI_2} \quad (11a)$$

We voeren dan de volgende liggerstijfheden in

$$k_1 = \frac{4 EI_1}{l_1} \quad k_2 = \frac{2 EI_2}{l_2} \quad (12)$$

Substitutie van (12) in (11a) levert:

$$\frac{q_2 l_2^2}{12 k_2} = \frac{M_1}{k_1} + \frac{M_1}{k_2} = M_1 \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \quad (13)$$

We voeren weer de stijfheidsverhouding μ in volgens:

$$\mu = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \quad (14)$$

Substitutie van (14) in (13) levert:

$$M_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{q_2 l_2^2}{12} = \mu \frac{q_2 l_2^2}{12} \quad (15)$$

In fig. 1e is voor dezelfde geometrische afmetingen als in fig. [551-2e] – dus voor een andere waarde van de stijfheidsverhouding μ – het momentenverloop in het portaal weergegeven.

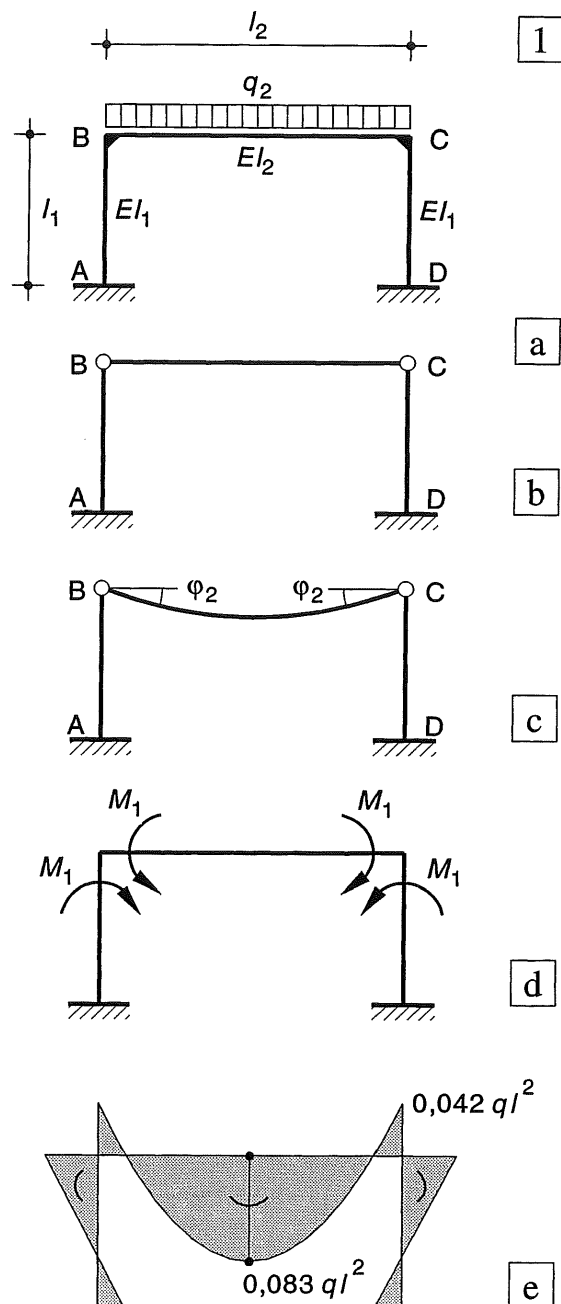


Fig. 1 Volledig ingeklemd portaal
 a. Schema
 b. Splitten in een vrij opgelegde ligger (regel) en twee liggers die aan één zijde volledig zijn ingeklemd en aan de andere zijde scharnierend zijn opgelegd (stijlen)
 c. Doorbuiging van de bovenregel
 d. Momenten om de gapingen weer te sluiten
 e. Momentenverloop voor $\mu = 0,5$

Oplegreacties

In fig. 2 zijn per ligger de oplegreacties weergegeven en de normaalkrachten die hierdoor in de regel en de stijlen worden veroorzaakt, raadpleeg zondig [519-C3].

2

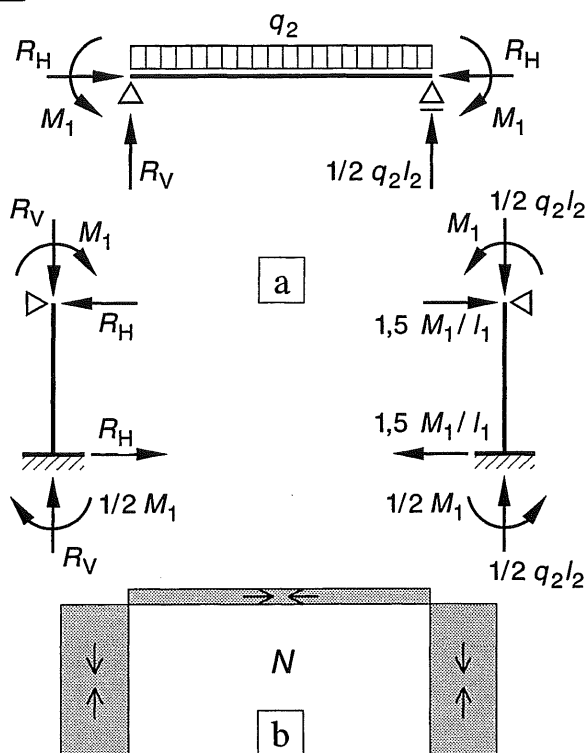
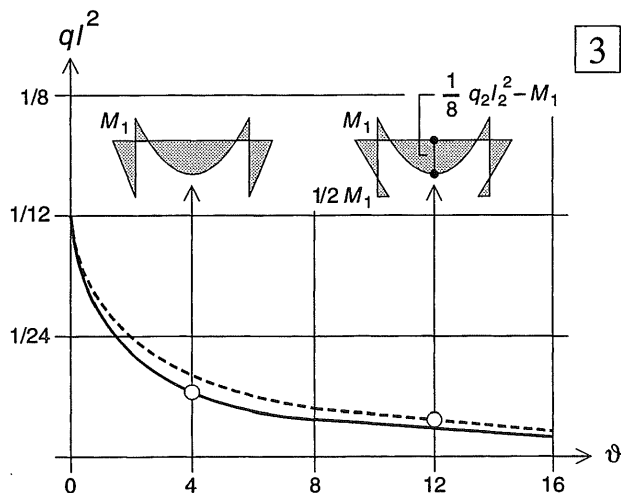


Fig. 2 Krachten in de afzonderlijke onderdelen

- a. Oplegreacties
links: in algemene notatie
rechts: uitgedrukt in q , M en l
- b. Normaalkrachtenlijn



3

22.5.6 ALGEMENE FORMULES

Om het negatieve overgangsmoment voor een tweescharnierspant en een volledig ingeklemd portaal rechtstreeks te kunnen vergelijken, substitueren we de desbetreffende waarden van k in de algemene vergelijking (4), c.q. (15).

Voor het tweescharnierspant maken we daartoe gebruik van de betrekkingen [548-(2a)] en voor het volledig ingeklemde portaal van de betrekkingen [549-(2b)] c.q. [554-(12)].

Voorts gebruiken we weer de stijfheidsverhouding ϑ van formule [553-(10)], waarbij we er vanuit gaan dat het materiaal voor stijl en regels gelijk is, zodat geldt: $E_1 = E_2 = E$.

$$\vartheta = \frac{EI_2/l_2}{EI_1/l_1} \quad (16)$$

Substitutie van (16) in de algemene formule (15) levert dan:

Voor het twee-scharnierspant:

$$M_1 = \frac{3}{3 + 2\vartheta} \frac{q_2 l_2^2}{12} \quad (17a)$$

Voor het volledig ingeklemde portaal:

$$M_1 = \frac{4}{4 + 2\vartheta} \frac{q_2 l_2^2}{12} \quad (17b)$$

In fig. 3 is de grootte van beide momenten uitgezet als functie van ϑ .

Het negatieve overgangsmoment kan dus nooit groter worden dan $M_1 = 1/12 ql^2$. Bij toenemende stijfheid van de bovenregel neemt de grootte van het moment echter snel af.

Fig. 3 Grootte van het overgangsmoment M_1 als functie van de stijfheidsverhouding ϑ

— Tweescharnierspant
- - - Volledig ingeklemd portaal

23 VERVORMINGEN II

Vervormingen van constructies door normaalkracht en buiging

23.1 INLEIDING

23.1.1 OVERZICHT

Normaalkrachten

De vervormingen van prismatische staven onder invloed van *normaalkrachten* zijn behandeld in KW-4 [414-415]. Het betreft de verlenging van centrisch getrokken, dan wel de verkorting van centrisch gedrukte staven.

Normaalkracht-vervormingen zijn vrijwel altijd te verwaarlozen ten opzichte van buig-vervormingen. In sommige gevallen moeten we toch rekening houden met normaalkracht-vervormingen, bijv. als we de vervorming van een vakwerk willen bepalen. Een vakwerk wordt immers geheel uit scharnierend verbonden staven opgebouwd gedacht.

Ook bij constructies die zijn samengesteld uit liggers en staven, zoals versterkte balken, kunnen de normaalkracht-vervormingen van de staven de hoofdkrachtenwerking in de ligger wezenlijk beïnvloeden.

In [558-564] wordt aangegeven op welke wijze men een indruk kan krijgen van de optredende vervormingen.

Buigende momenten

Het principe van de bepaling van de doorbuiging van liggers onder invloed van *buigende momenten* is behandeld in [506-507].

Als de belasting op de ligger bekend is, kunnen we door $4 \times$ integreren de doorbuiging bepalen. Voor een aantal basis-belastinggevallen is deze integratie langs analytische weg uitgevoerd in [508-519]. Hieruit resulteren een aantal formules waarmee we door superpositie de buigvervormingen van een aantal statisch bepaalde en statisch onbepaalde liggers kunnen berekenen [520-527].

Het principe van de berekening van (statisch onbepaalde) doorgaande liggers onder gelijkmatig verdeelde belasting is behandeld in [528-539].

Dit berust op de volgende twee stappen:

1. het bepalen van de gapingen tussen de opeenvolgende liggers van het statisch bepaalde hoofdsysteem,
2. het sluiten van deze gapingen door middel van overgangsmomenten.

23.1.2 RELATIE NORMAALKRACHT – REKVERVORMING

We kunnen exact hetzelfde principe aanhouden voor de berekening van *willekeurig belaste* doorgaande liggers.

Daartoe moeten we in stap 1. ook de hoekverdraaiingen bij een willekeurige belasting kunnen bepalen. Dit wordt behandeld in [568-573]. Stap 2. blijft geheel onveranderd.

Bij het bepalen van de vervormingen van portalen werkt het gebruik van de basisformules wat omslachtiger dan bij de doorgaande liggers. De afleidingen in [540-555] zijn daarom beperkt tot symmetrische portalen onder een gelijkmatig verdeelde verticale belasting.

Om meer algemeen te werk te kunnen gaan, is in het voorliggende hoofdstuk 23 het analytisch integreren vervangen door grafisch integreren, hetgeen zeker voor willekeurige belastingen een stuk eenvoudiger verloopt. De hieruit voortvloeiende gegevens kunnen desgewenst ook worden toegepast voor willekeurig belaste liggers bij de methode Cross in KW-6.

De basis voor de berekening van rekvervormingen is gelegd in KW-0 bij de bespreking en de schematisering van het materiaalgedrag in paragraaf 4.6 [094-097].

In KW-4 [414] is voor zuivere trek of druk van een prismatische staaf een recapitulatie gegeven van de uitkomsten in KW-0.

Uitgangspunt is de Wet van Hooke [414-(9)]:

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (a)$$

De normaalspanning σ is recht evenredig met de rek ε , de evenredigheidsconstante E wordt aangeduid als de elasticiteitsmodulus.

De verlenging van een prismatische staaf (bij centrische trek) of de verkorting (bij centrische druk) vindt men door in (a) de volgende waarden te substitueren:

$$\sigma = F/A \text{ en } \varepsilon = \Delta l/l.$$

Hieruit volgt formule [414-(10)]:

$$\Delta l = \frac{F l}{EA} \quad (b)$$

De verlenging van een prismatische staaf, die is onderworpen aan een constante trekkracht F , is recht evenredig met de kracht F en de lengte l van de staaf en omgekeerd evenredig met de staafdoorsnede A en de elasticiteitsmodulus E van de staaf. De factor EA wordt hierbij aangeduid als de *rekstijfheid*. Een centrische kracht F op elk staafuiteinde veroorzaakt in elke normale doorsnede van de staaf een snedekracht die wordt aangeduid als de normaalkracht $N = F$. Bij verlenging onder trekkrachten wordt de *rek* positief gerekend en bij verkorting onder druk negatief. Negatieve rek wordt ook wel aangeduid als *stuik*.

23.2.1 VERVORMING VAN TWEE
GESCHOORDE STAVEN*Verticale kracht*

We beschouwen een opstelling als in fig 1a is weergegeven. De staven A-C en B-C zijn scharnierend aan de ondergrond bevestigd in de punten A en B en voorts in punt C scharnierend met elkaar verbonden. In punt C wordt een verticale last F_V aangebracht. In beide staven ontstaan (gelijke) drukkrachten waarvan de grootte volgt door de geometrie van het schema in fig. 1a te vergelijken met het daaruit volgende krachten-evenwicht in fig. 1b:

Voor $l_1 = l_2 = l$ en $N_1 = N_2 = N$ geldt dan:

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} = \frac{F_V}{2N} \quad (1a)$$

Hieruit volgt

$$N = \frac{1}{2} F_V \frac{l}{h} \quad (1b)$$

Beide staven verkorten over een afstand:

$$\Delta l = \frac{N l}{EA} \quad (2)$$

Substitutie van (1b) in (2) levert:

$$\Delta l = \frac{F_V}{2EA} \frac{l^2}{h} \quad (3)$$

Vervolgens denken we ons het scharnier in C losgemaakt en laten we beide staven langs hun as verkorten. Deze toestand is in overdreven vorm weergegeven in fig. 1c. Om de verbinding in scharnier C weer aan te kunnen brengen, moeten de staven roteren om de punten A en B. Ze beschrijven daarbij een cirkelboog tot ze elkaar weer ontmoeten in punt C', zie fig. 1c.

Aangezien de verkortingen van de staaf lengten en de optredende rotaties zeer klein zijn ten opzichte van de oorspronkelijke staaf lengten, mogen we aannemen dat de verplaatsingen loodrecht op de staafas plaatsvinden. In fig. 1d zijn de verplaatsingen Δl langs de staafas (ten opzichte van punt C) en de daarna volgende verplaatsingen Δt loodrecht op de staafas, nog sterker vergroot weergegeven. Uit fig. 1d volgt dat geldt:

$$\sin \alpha = \Delta l / u_y \quad (= h / l) \quad (4a)$$

Substitutie van (3) in (4a) levert tenslotte:

$$u_y = \frac{F_V}{2EA} \frac{l^3}{h^2} \quad (5)$$

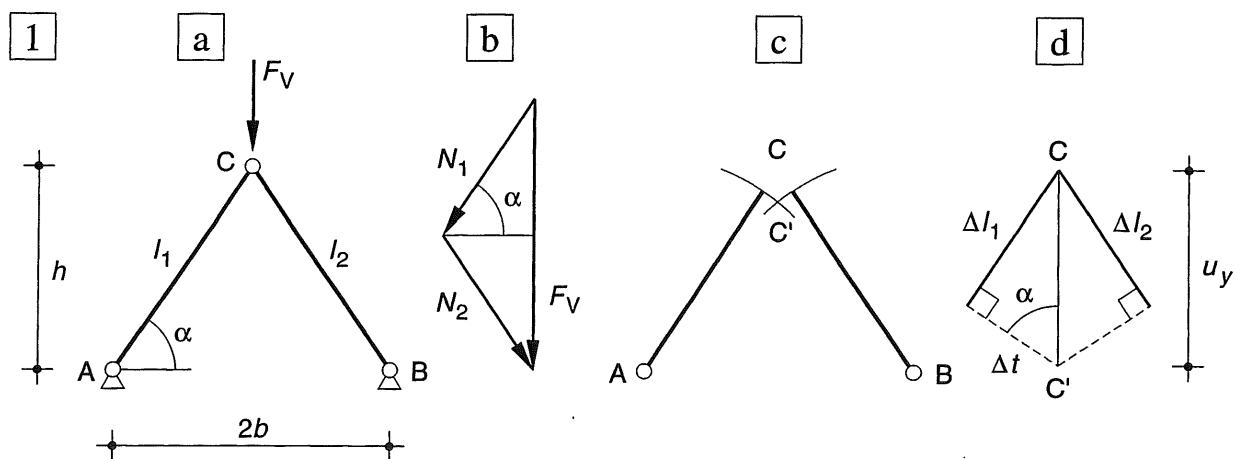


Fig. 1 Vormvaste driehoek gevormd door twee staven en de ondergrond

a. Schema

b. Ontbinden van F_V

c. Verkortingen van de staven langs de staafas en rotatie van de staven tot ze elkaar ontmoeten in punt C'

d. Sterk vergroot weergegeven verplaatsingen

Horizontale kracht

We beschouwen vervolgens dezelfde configuratie als in fig. 1a, maar brengen nu een horizontale kracht F_H aan, zie fig. 2a.

In staaf A-C ontstaat dan een trekkracht en in staaf B-C een even grote drukkracht, zie fig. 2b: Op overeenkomstige wijze als in [558] geldt:

$$l_1 = l_2 = l \text{ en } |N_1| = |N_2| = N$$

Hieruit volgt dan weer

$$\cos \alpha = \frac{b}{l} = \frac{F_H}{2N} \quad (6a)$$

Herschreven volgt dan voor de normaalkrachten

$$N = \pm \frac{1}{2} F_H \frac{l}{b} \quad (6b)$$

De verlenging, c.q. verkorting van de staven volgt weer uit formule (2).

Substitutie van (6b) in (2) levert:

$$\Delta l = \frac{F_H}{2EA} \frac{l^2}{b} \quad (7)$$

In fig. 2c is de verlenging en verkorting van beide staven langs de staafas weergegeven. Als we beide staven weer om A resp. B laten roteren, zullen ze samenkomen in punt C'' , zie fig. 2c.

In fig. 2d tenslotte zijn de verplaatsingen Δl langs de staafas en de daaruit volgende verplaatsingen Δt loodrecht op de staafas nog sterker vergroot weergegeven. Uit fig. 2d volgt dat geldt:

$$\cos \alpha = \Delta l / u_x (= b/l) \quad (4b)$$

Substitutie van (7) in (4b) levert tenslotte voor de horizontale verplaatsing:

$$u_x = \frac{F_H}{2EA} \frac{l^3}{b^2} \quad (8)$$

Bij een willekeurig gerichte kracht in punt C, kan deze worden ontbonden in de componenten F_V en F_H en kunnen de daaruit volgende verplaatsingen u_y en u_x worden gesuperponeerd.

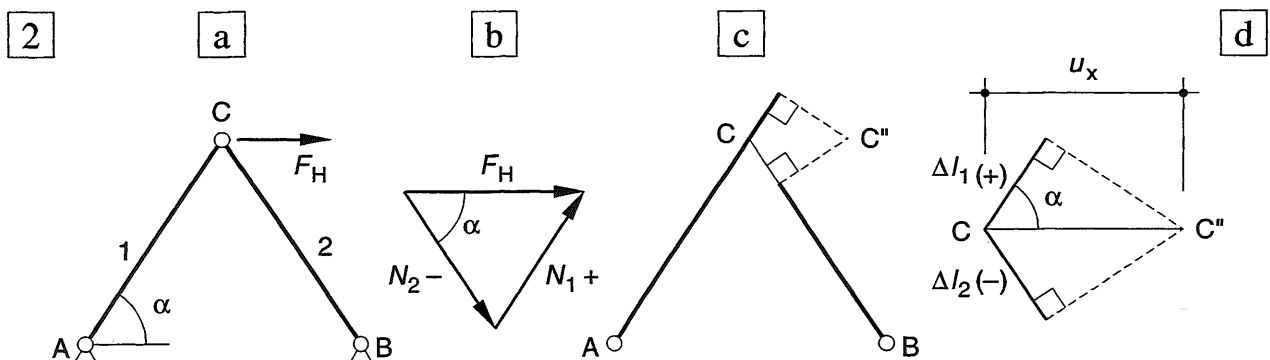


Fig. 2 Horizontale kracht op het samenstel van staven
a. Schema
b. Krachten-evenwicht

c. Verlenging en verkorting van de staven langs de staafas en rotatie om de punten A en C
d. Sterk vergroot weergegeven verplaatsingen

23.2.2 VERPLAATSINGEN VAN EEN SYMMETRISCH BELAST KOORD

In fig. 1a is een koord weergegeven dat symmetrisch is belast door twee verticale puntlasten. De krachten in het koord zijn direct te bepalen met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek, zie fig. 1b; herlees zonodig KW-1 [109-110].

Als het koord overal dezelfde doorsnede A bezit, zijn de verlengingen van de drie onderdelen van het koord evenredig met:

- de kracht in het betreffende deel,
- de lengte van dat deel.

Deze verlengingen kunnen worden bepaald met behulp van formule [558-(2)].

De verplaatsingen van de punten B en C kunnen gemakkelijk grafisch worden bepaald. Aangezien het koord alleen maar trekkrachten kan overbrengen moeten alle onderdelen van het koord verlengen. Om de afzonderlijke delen na verlenging weer passend te krijgen, zullen de delen $A-B$ en $D-C$ van het koord resp. om A en D naar buiten moeten roteren, maar behoeft het koorddeel $B-C$ uit symmetrie-overwegingen alleen maar evenwijdig omlaag te verplaatsen.

In fig. 1c zijn deze verplaatsingen voor de linkerhelft van het koord uitgezet ten opzichte van de oorspronkelijke ligging van punt B . Het afstandje $B-B_1$ geeft (op een sterk vergrote schaal) de verlenging van het koorddeel 1 weer en $B-B_2$ de verlenging van het halve koorddeel 2 (ten opzichte van punt M). Het snijpunt van de loodlijnen n_1 en n_2 levert dan de ligging van het verplaatste punt B' .

In fig. 1d zijn de verplaatsingen van de punten B en C beide uitgezet ten opzichte van één en hetzelfde vaste punt. Raak hierbij niet in de war; punt B van koorddeel AB verplaatst schuin naar beneden naar rechts en punt C van koorddeel DC schuin naar beneden naar links.

De afstand B_1-C_3 geeft dus een verkorting aan, en niet een verlenging zoals men oppervlakkig beschouwd zou kunnen denken. De beide loodlijnen in de figuur moeten elkaar dus eerst snijden voordat het verlengde deel B_2-C_2 er weer tussen past.

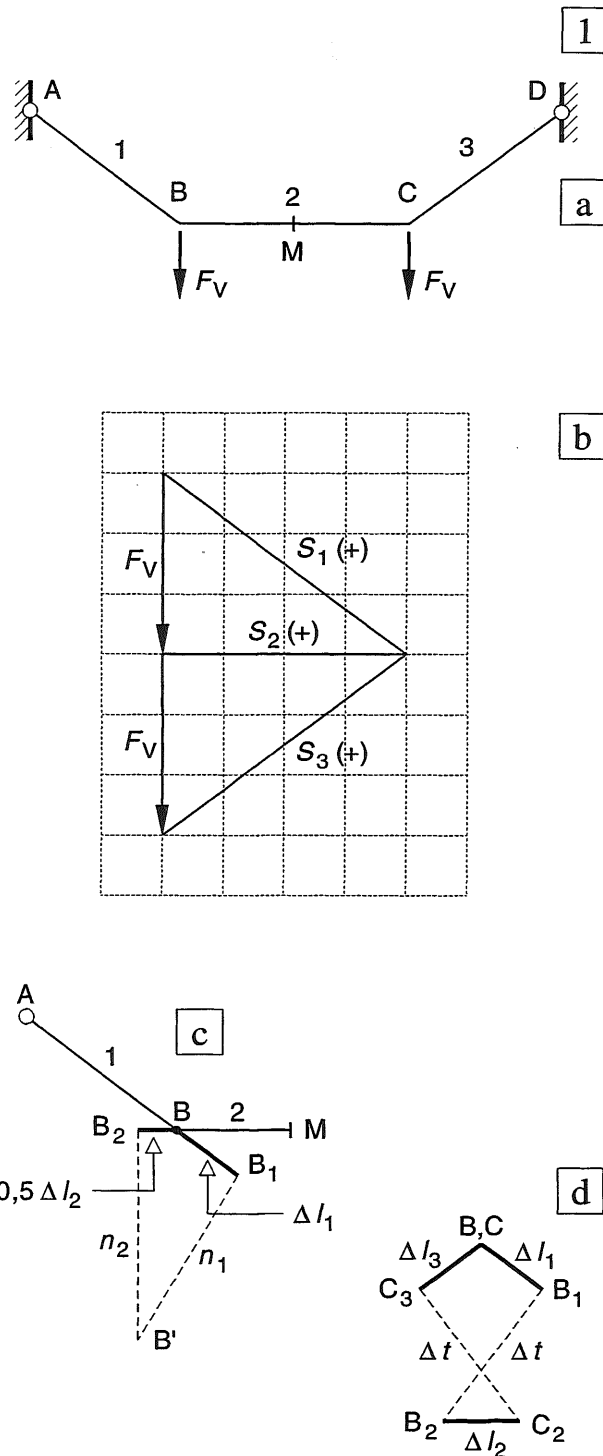


Fig. 1 Koord onder symmetrische belasting
 a. Schema
 b. Krachtenevenwicht (poolfiguur)
 c. Verlenging van de delen 1 en 2 van het koord
 d. Sterk vergroot weergegeven verplaatsing van de punten B en C van het koord

23.2.3 VERPLAATSINGEN BIJ WILLEKEURIGE PUNTLASTEN

We beperken ons tot het geval dat de twee puntlasten ongelijk groot zijn en op willekeurige plaatsen op het koord aangrijpen, zie fig. 2a. De grootte van de krachten volgt uit de poolfiguur van fig. 2b. De verlengingen van de drie delen van het koord volgen uit formule [558-(2)]. In fig. 2c zijn de rotaties en verplaatsingen van de verlengde koorddelen op sterk vergrote schaal uitgezet.

Hierbij zijn de verplaatsingen Δl_1 van A-B en Δl_3 van D-C uitgezet ten opzichte van een vast punt O. Omdat de verplaatsingen en rotaties zeer klein zijn, mogen alle verlengingen in hun oorspronkelijke richting worden uitgezet en de rotaties hier loodrecht op. Na rotatie komen de punten B en C uiteindelijk terecht in B' en C' en moeten daar dus passen aan de verlenging Δl_2 van deel B-C, zie fig. 2c. Om deze punten te vinden is de verlenging Δl_2 in richting en grootte rechts van punt B₁ uitgezet en vervolgens evenwijdig verschoven tot punt C'. Punt B' volgt dan door vanuit C' een lijn te tekenen evenwijdig aan de richting van het koord-deel BC.

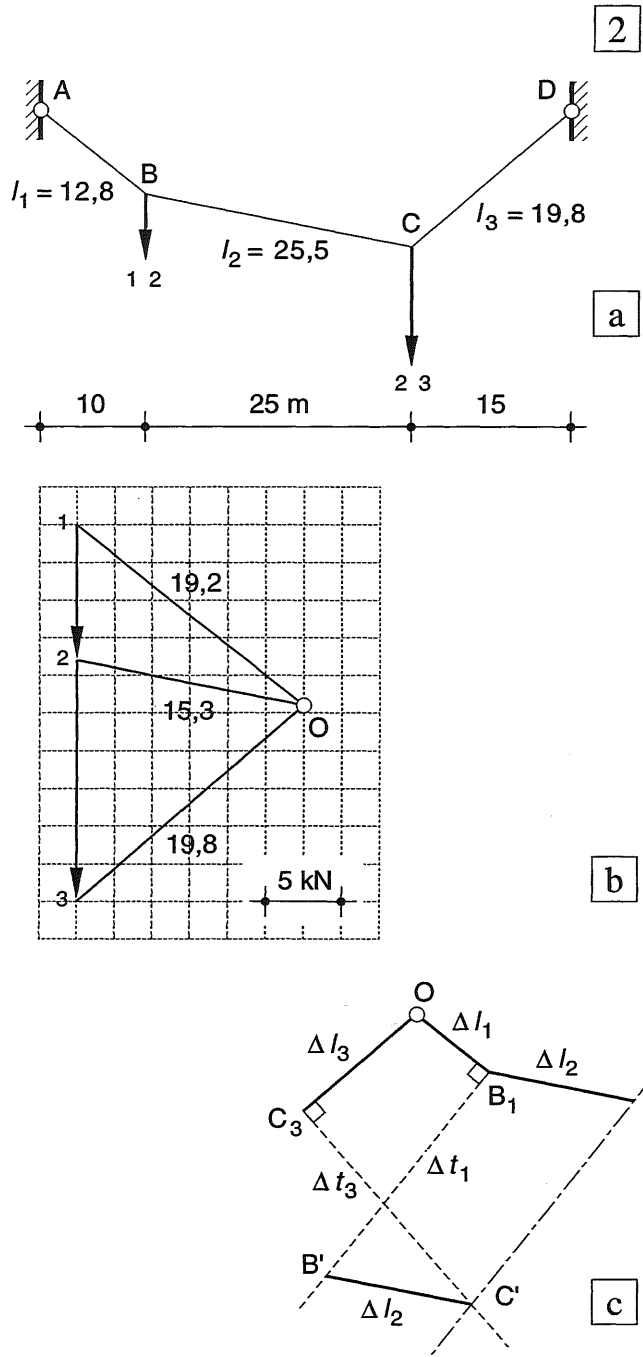


Fig. 2 Verplaatsingen van een koord onder invloed van twee willekeurige puntlasten

- Vorm van het koord
- Poolfiguur
- Verplaatsingen uitgezet ten opzichte van een vast punt O, waarbij de uiteindelijke oplossing volgt door evenwijdige verschuiving van de verlenging van het middelste koorddeel B-C

23.2.4 WILLIOT

Het grafische principe van de vorige paragrafen kan ook voor vakwerken worden toegepast en is daar bekend onder de naam Williot. De verplaatsingen van vakwerken worden meestal niet berekend en als het al gebeurt, wordt veelal gebruik gemaakt van een computerprogramma.

Volledigheidshalve wordt de manier van werken hier kort besproken. Aan de hand van een voorbeeld zal blijken dat een redelijke indicatie van de zakkingen kan worden gegeven, ook al zijn de definitieve staafafmetingen van het vakwerk nog niet bekend. Hieruit volgt een benaderingsberekening waarbij het vakwerk als een ligger kan worden opgevat. Dit levert een snelle indicatie van de te verwachten zakking, zie KW-8.

In fig. 1a is het schema weergegeven van een vrij opgelegde vakwerkligger. Vanwege de symmetrie is alleen de rechterhelft van het vakwerk beschouwd, zie fig. 1b.

De knooppunten zijn genummerd van 1 t/m 10 en de staven worden aangegeven met hun knooppuntnummers. Ter wille van de eenvoud is het vakwerk opgebouwd uit '3-4-5 driehoeken'. De vervormingen zijn bepaald ten opzichte van knoop 2 in de verticale symmetrielij.

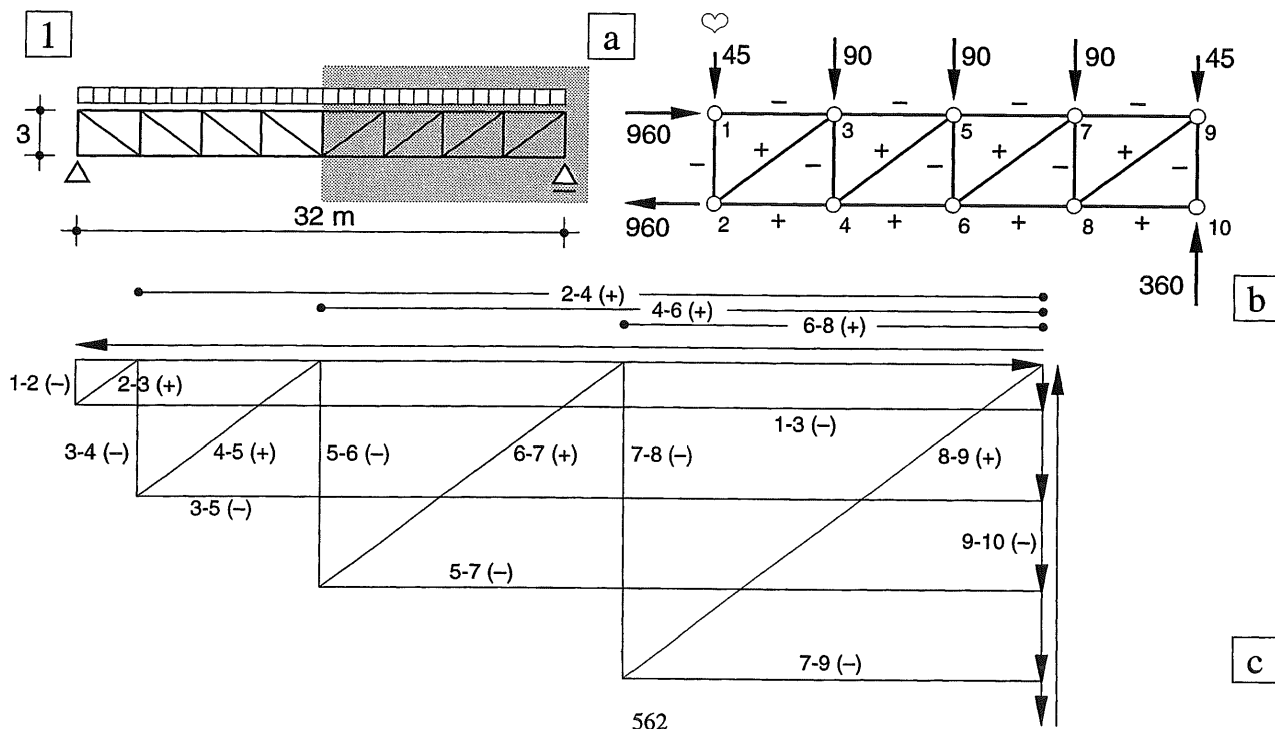
De staafkrachten kunnen gemakkelijk worden bepaald met behulp van een Cremona; KW-3 [340-345] of met de snedemethode [320-326]. In fig. 1c is de Cremona weergegeven en de uitkomsten zijn vermeld in tabel A.

In de praktijk worden voor de boven- en onderrandstaaf doorgaande liggers gekozen. Als we knik buiten beschouwing laten, kan voor de boven- en onderrandstaven dezelfde doorsnede worden gebruikt. Voor de maximaal optredende spanning in het bezwijkstadium is uitgegaan van $\sigma_u = 240 \text{ N/mm}^2$. De verticalen en diagonalen hebben – afwijkend van de praktijk – eveneens gelijke afmetingen gekregen die zijn gebaseerd op de maximale staafkracht in de buitenste diagonaal 8-9. Alle staafkrachten met de hieruit volgende verlengingen zijn weergegeven in tabel A.

De verplaatsingen in fig. 2 zijn uitgezet vanuit punt 2 in de richting van de betreffende staaf op de aangegeven schaal. De verkorting van staaf 1-2 wordt dus verticaal omlaag uitgezet en levert het verplaatste punt 1v. De verkorting van staaf 1-3 wordt vanuit punt 1 horizontaal naar links uitgezet en levert het verplaatste punt 3h. De verlenging van de diagonaal 2-3 wordt vanuit het vaste punt 2 schuin naar rechtsboven uitgezet en levert het verplaatste punt 3d. Rotatie van de staven 1-3 en 2-3, resp. om 1 en 3 levert dan het verplaatste punt 3. In de Williot worden dus vanuit 3h en 3d loodlijnen neergelaten die punt 3 als snijpunt leveren. Vanuit de punten 2 en 3 kan dan de verlenging van 2-4 en de verkorting van 3-4 worden uitgezet. Dit levert de punten 4h en 4v. De loodlijnen vanuit deze punten op de richting van de bijbehorende staven levert dan het verplaatste punt 4. Op deze wijze kan het vakwerk punt voor punt worden afgewerkt.

Fig. 1 Verplaatsingen van een vakwerkligger

- Schema van het vakwerk
- Uitwendige belastingen rechterhelft
- Cremona



Tabel A Staafkrachten en verlengingen

StAAF	Staafkracht in kN	Verlenging in mm
1-3	-960	-4,44
2-4	+900	+4,16
3-5	-900	-4,16
4-6	+720	+3,33
5-7	-720	-3,33
6-8	+420	+1,94
7-9	-420	-1,94
8-10	0	0,00
1-2	-45 (halve dsn)	-0,57
3-4	-135	-0,86
5-6	-225	-1,43
7-8	-315	-2,00
9-10	-360	-2,28
2-3	+75	+0,79
4-5	+225	+2,38
6-7	+375	+3,96
8-9	+525	+5,55

Er zijn twee soorten staven: Stalen vakwerk met:
 1 Boven- en onderrandstaven $\sigma_u = 240 \text{ N/mm}^2$ en
 2 Verticalen en diagonalen $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

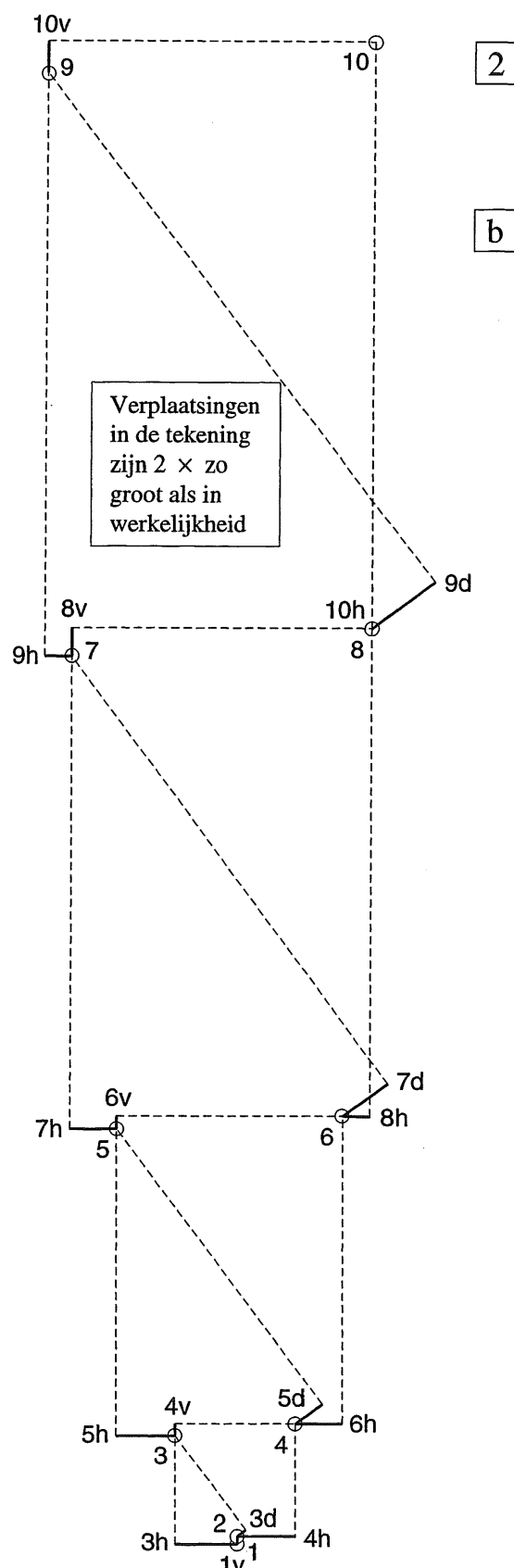
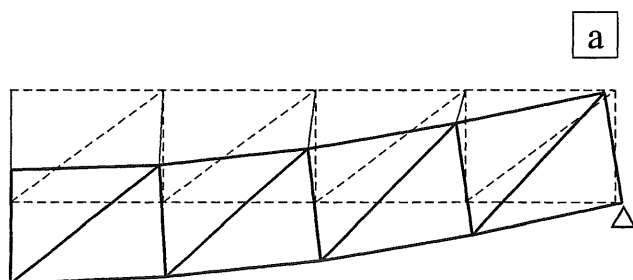
Voor de zwaarst belaste staaf geldt:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{\sigma_u}{E} l = 0,0011 l$$

Staafsoort 1 heeft een lengte van 4 m en wordt gedimensioneerd op: $F_{1-3} = 960 \text{ kN}$. Hierbij geldt dus dat $\Delta l = 4,44 \text{ mm}$. De verlenging van de andere horizontale staven is dan in de verhouding $F_i / 960$.

Bij staafsoort 2 wordt gedimensioneerd op: $F_{8-9} = 525 \text{ kN}$. Voor een verticaal geldt dan: $\Delta l = 0,0011 \cdot 3000 = 3,33 \text{ mm}$ en voor een diagonaal: $\Delta l = 0,0011 \cdot 5000 = 5,55 \text{ mm}$. Bij staaf 1-2 mag maar de halve staafdoorsnede in rekening worden gebracht uit symmetrie-overwegingen.

Fig. 2 Verplaatsingen van de rechterhelft van de vakwerkligger
 a. Verplaatsingen
 b. Williot (vaste verhouding staafdoorsneden)
 Maximale zakking: $w = 108 \text{ mm}$



23.2.5 VERSTERKTE BALKEN

Een versterkte balk is een ligger die voorzien is van een aantal staven, die scharnierend met elkaar en de ligger zijn verbonden, zie fig. 1a.

Door de belasting op de ligger ontstaan normaalkrachtvervormingen in het staafwerk, die maar geringe verticale verplaatsingen veroorzaken, zie [560]. Hierdoor wordt de ligger op enkele punten verend ondersteund. De gehele krachtworping ligt vast zodra de grootte F_V in de verticale staven van het staafwerk bekend is.

De krachten in het staafwerk kunnen met behulp van poolfiguur en stangenvielhoek worden bepaald en uitgedrukt in de nog onbekende kracht F_V en de geometrische afmetingen van de versterkte balk, zie fig. 1b. De reactiekrachten op de ligger met de bijbehorende momentenlijn zijn weergegeven in fig. 1c. De vorm van deze momentenlijn is gelijkvormig met de vorm van het (gespiegelde) staafwerk, zie ook KW2 [296-297]. De uitwendige belasting op de ligger met de reactiekrachten en de bijbehorende momentenlijn zijn weergegeven in fig. 1d. De grootte van F_V volgt dan uit de voorwaarde dat de verticale verplaatsing van de punten B en C van het staafwerk gelijk moet zijn aan de verticale verplaatsing van dezelfde punten van de ligger ten gevolge van de reactiekrachten van het staafwerk en de uitwendige belasting op de ligger, dus de superpositie van de momenten-invloeden uit fig. 1c en 1d.

Meestal behelpen we ons echter met eenvoudiger middelen. Soms wordt aangenomen dat in het midden van de ligger een scharnier aanwezig is, zie fig. 3e. Ter plaatse van een verticale doorsnede door het scharnier kan de ligger zelf geen moment overbrengen. Het totale moment van de versterkte balk moet dan worden overgebracht door het koppel dat wordt geleverd door de trekkracht in de trekstaaf en de drukkracht in de ligger, zie fig. 3e, zodat geldt: $F_H * h = 1/8 * ql^2$.

In werkelijkheid zal de ligger zelf meestal zonder scharnier worden uitgevoerd en wordt het stavenstelsel naderhand aangespannen om de vervormingen te verminderen of zelfs een opwaartse zeeg aan te brengen. Uit de gewenste vorm van het gesuperponeerde momentenvlak zijn de benodigde krachten F_V , dus ook de aanspankrachten gemakkelijk te bepalen, zie fig. 1f.

Bij een scharnier in het midden van de balk worden de krachten in het staafwerk veroorzaakt door de verplaatsingen en treedt ter plaatse van het scharnier in de ligger een knik op. Bij een balk die uit één geheel bestaat hebben we de grootte van de op- of neerwaartse zeeg geheel in eigen hand door de keuze van de grootte van de aanspankracht.

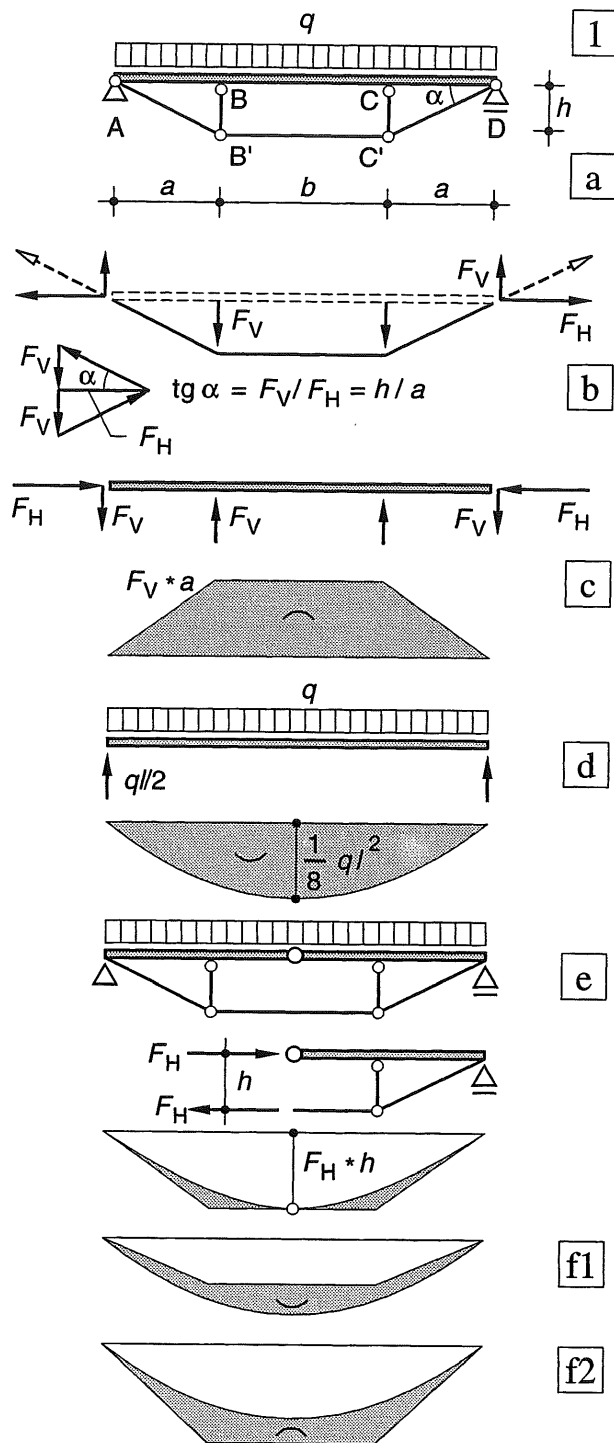


Fig. 1 Versterkte balken.

- a Schema
- b Staafwerk: evenwichtssysteem van krachten
- c Ligger: krachten vanuit het staafwerk (zie b.) met de daaruit volgende momenten
- d Ligger onder uitwendige belasting met momentenlijn
- e Versterkte balk met scharnier in de ligger + moment
- f Aangespannen versterkte balk met momentenverloop
- f1 bij geringe voorspankracht; doorhang van de ligger
- f2 bij grotere voorspankracht; opbuiging van de ligger

23.3.1 ALGEMEEN

De relatie tussen doorbuiging en belasting is afgeleid in [506-507]. De belangrijkste formules zijn hiernaast herhaald en voorzien van een nieuw formule-nummer.

Recapitulatie van de belangrijkste formules

- (9): Geometrie;
verband tussen kromming en moment

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} \quad (9)$$

- (10): Evenwicht;
verband tussen moment en belasting

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = - q_x \quad (10)$$

- (11): Samenvatting van de
differentiaalvergelijkingen (9) en (10)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{-1}{EI} \frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{+ q_x}{EI} \quad (11)$$

- (12): Integratie van de
differentiaalvergelijking (11)

$$w = \int \int \int \int \frac{q_x}{EI} dx \quad (12)$$

- (13): Stapsgewijze opbouw van formule (11):
Achtereenvolgens differentiëren van w
tot uiteindelijk q wordt gevonden

$$w \quad (13a)$$

$$dw/dx = + \varphi_x \quad (13b)$$

$$d^2 w/dx^2 = - M_x / EI \quad (13c)$$

$$d^3 w/dx^3 = - V_x / EI \quad (13d)$$

$$d^4 w/dx^4 = + q_x / EI \quad (13e)$$

- (14): Stapsgewijze opbouw van formule (12):
Achtereenvolgens integreren van q tot
uiteindelijk w wordt gevonden

$$q_x$$

$$V_x = \int - q_x dx$$

$$M_x = \int + V_x dx$$

$$\varphi_x = \int + \kappa_x dx = \frac{1}{EI} \int - M_x dx$$

$$w_x = \int + \varphi_x dx$$

23.3.2 GESPLITSTE DIFFERENTIAAL- VERGELIJKINGEN

Bij de puur analytische behandeling in hoofdstuk 21 werd de differentiaalvergelijking [565-(11)] als uitgangspunt gebruikt.

Bij vrij opgelegde liggers zonder overstek blijkt het echter aantrekkelijk, om van de gesplitste vergelijkingen (9) en (10) uit te gaan. Als we beide vergelijkingen in algemene termen integreren, dan vinden we:

$$w_x = - \int \int \frac{M_x}{EI_x} dx \quad (15)$$

$$M_x = - \int \int q_x dx \quad (16)$$

Beide formules hebben volledig dezelfde opbouw. Als we de grootte q_x twee maal integreren vinden we het moment M_x .

Als we vervolgens de grootte M_x/EI_x twee maal integreren, vinden we de zakking w_x .

De procedure is volkomen vergelijkbaar als de randvoorwaarden dat ook zijn.

Vrij opgelegde ligger

Bij een vrij opgelegde ligger zonder overstekken blijkt dit inderdaad het geval te zijn.

Formule (16); hoe q_x ook over de ligger is verdeeld, er zal altijd moeten gelden, zie fig. 1a:

$$M_x = 0 \text{ voor } x = 0 \text{ en } x = l.$$

Formule (15); hoe M_x/EI_x ook over de ligger is verdeeld, er zal altijd moeten gelden; fig. 1b:

$$w_x = 0 \text{ voor } x = 0 \text{ en } x = l.$$

Dit houdt het volgende in:

Zoals bekend kan bij een vrij opgelegde ligger het verloop van het buigend moment bij elke willekeurige belasting worden berekend met behulp van de snedemethode (zie KW-2).

Als we dit momentvlak (gedeeld door EI_x) dan weer als het belastingvlak beschouwen, kan op precies dezelfde wijze het bijbehorende gereduceerde momentenvlak worden bepaald, dat nu echter het doorbuigingsverloop voorstelt.

Bij de trits vergelijkingen (14) levert één \times integreren van q de dwarskracht V op, en de tweede \times integreren het buigende moment M .

Evenzo levert één \times integreren van M/EI de hoekverdraaiing φ op en de tweede \times integreren de zakking w .

Het bovenstaande houdt het volgende in.

Als we het momentenvlak (gedeeld door EI_x) beschouwen als het belastingvlak, dan komt het hierbij behorende dwarskrachtenverloop overeen met het hoekverdraaiingsverloop.

Over het algemeen is EI_x constant, zodat het resultaat ook achteraf kan worden gedeeld door de buigstijfheid EI .

Enkele eenvoudige voorbeelden voor vrij opgelegde liggers zijn uitgewerkt in [569-572].

Eénzijdig ingeklemde ligger

Bij een éénzijdig ingeklemde ligger blijken de randvoorwaarden niet overeenkomstig te zijn.

Formule (16); hoe q_x ook over de ligger is verdeeld, er zal altijd moeten gelden, zie fig. 2b:

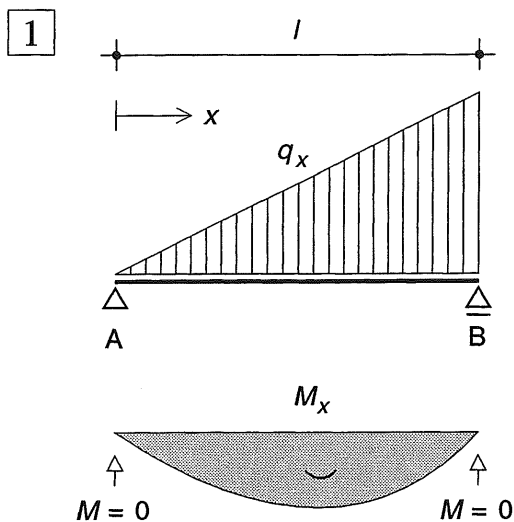
$$M_x = 0 \text{ en } V_x = 0 \text{ voor } x = 0.$$

Formule (15); hoe M_x/EI_x ook over de ligger is verdeeld, er zal altijd moeten gelden; fig. 2b:

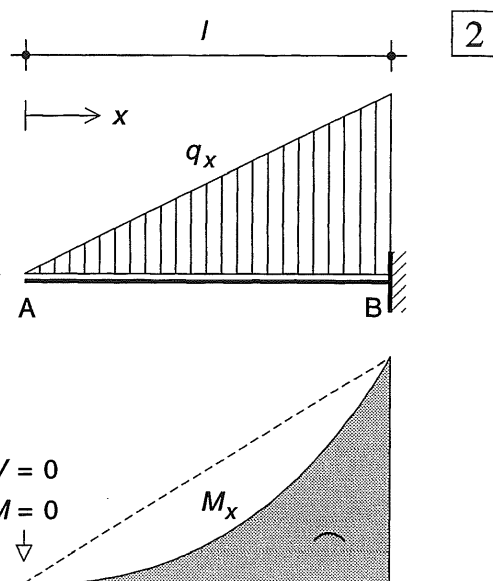
$$w_x = 0 \text{ en } \varphi_x = 0 \text{ voor } x = l.$$

De overeenkomstige randvoorwaarden gelden dus juist aan het andere ligger-uiteinde.

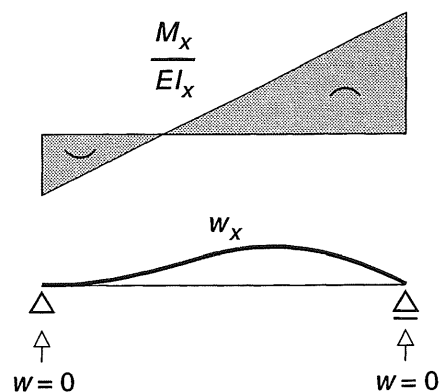
In [574-575] zal dan ook blijken dat we voor de bepaling van de zakkingen het statisch moment van het momentenvlak moeten opmaken ten opzichte van het vrije uiteinde.



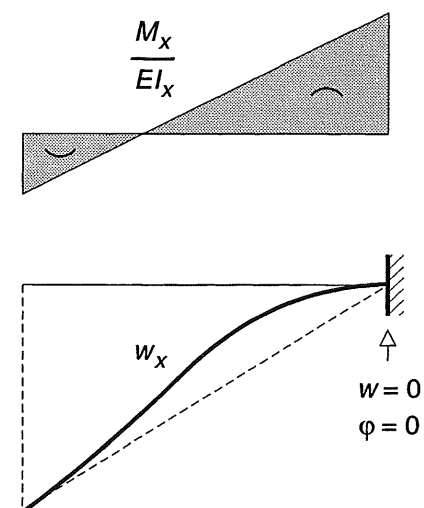
a1



a2



b1



b2

Fig. 1 Vrij opgelegde ligger

- a1 Belastingvlak q_x
 a2 Bijbehorend momentvlak M_x
 b1 Gereduceerd momentvlak M_x/EI_x
 opgevat als belastingvlak
 b2 Bijbehorend doorbuigingsverloop w_x

Fig. 2 Eenzijdig ingeklemde ligger

- a1 Belastingvlak q_x
 a2 Bijbehorend momentvlak M_x
 b1 Gereduceerd momentvlak M_x/EI_x
 opgevat als belastingvlak
 b2 Bijbehorend doorbuigingsverloop w_x

NB Zowel in fig. 1 als in fig. 2 hebben de onder a. en b. getekende gevallen geen relatie met elkaar.

In de gevallen a. betreft het een ligger die is belast door een driehoekig verlopende belasting.

In de gevallen b. komt het momentenverloop overeen met dat van een ligger die uitsluitend is belast door randmomenten tezamen met een constante dwarskracht

23.4.1 ALGEMEEN

Voor het oplossen van statisch onbepaalde constructies met behulp van gaapvergelijkingen, en ook bij toepassing van de methode Cross, is het nodig om de hoekverdraaiingen te kennen, die de vrij opgelegde liggers van het statisch bepaalde hoofdsysteem zullen ondergaan onder invloed van de belasting. Deze hoekverdraaiingen zijn meestal eenvoudig te berekenen.

Bij de berekening van de doorbuiging kunnen we ons beperken tot de doorbuiging in het midden van de overspanning. Deze doorbuiging blijkt òf gelijk te zijn aan de maximale doorbuiging, òf er maar weinig van af te wijken.

Als we het verloop van de doorbuiging over de gehele lengte van de ligger willen weten, kunnen we beter gebruik maken van een grafische methode met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek, zie KW-1.

We zullen de hierboven genoemde berekeningen uitvoeren voor enkele eenvoudige belastinggevallen. Eerst bepalen we op de gebruikelijke wijze het momentenverloop in de ligger. Daarna plaatsen we dit momentenverloop als een belasting op een tweede overeenkomstige ligger. Hierbij nemen we voorlopig aan dat de buigstijfheid EI constant is over de gehele lengte van de ligger.

Om niet in de war te komen zullen we de belasting, de oplegreacties, de dwarskrachten en de buigende momenten in deze tweede ligger met dezelfde notaties aangeven als voorheen, maar dan wel in een ander lettertype:

R ; V ; M (Helvetica).

Als laatste substitueren we dan:

$$\varphi = R/EI \text{ of } V/EI; w = M/EI$$

Omdat alle bijschriften in de figuren al in het lettertype Helvetica zijn weergegeven, zijn voor de analoge ligger vette symbolen gebruikt.

23.4.2 LIGGER MET RANDMOMENT

In fig. 1 is een vrij opgelegde ligger weergegeven die is belast door een rechtsdraaiend koppel aan het linker-uiteinde (dit is de gespiegelde versie van ligger C1[518]).

Hierdoor ontstaat een positief momentenverloop in de ligger, zie fig. 1b.

Omdat we weten dat hierdoor een positief doorbuigingsverloop ontstaat, plaatsen we dit momentenvlak als een neerwaarts gerichte belasting op de tweede ligger, zie fig. 1c.

Zoals reeds eerder is vermeld, zullen we het delen door EI voorlopig achterwege laten. De oplegreacties en het buigende moment in het veldmidden worden dan bepaald bij de driehoekig verlopende q -belasting met als maximum:

$$q = K$$

De gedetailleerde berekening vanaf fig. 1d is hiernaast weergegeven op blad [569].

Totale belasting, zie fig. 1d:

$$Q = \frac{1}{2} K l \quad 1$$

Voor de bepaling van de hoekverdraaiingen in A en B bepalen we de 'oplegreacties' van deze ligger door het statisch moment op te maken om resp. A en B.

Uit de voorwaarde $\sum K_B = 0$ volgt:

$$R_A * l - Q * \frac{2}{3} l = 0$$

$$R_A = \frac{2}{3} Q = \frac{1}{3} K l$$

Uit de voorwaarde $\sum K_A = 0$ volgt:

$$R_B = \frac{1}{3} Q = \frac{1}{6} K l$$

De hoekverdraaiingen in de punten A en B zijn dan gelijk aan:

$$\varphi_A = \frac{R_A}{EI} = \frac{K l}{3 EI} \quad (17a)$$

$$\varphi_B = \frac{R_B}{EI} = \frac{K l}{6 EI} \quad (17b)$$

Voor de doorbuiging in het veldmidden bepalen we het buigend moment van de tweede ligger in punt M. Dit is het eenvoudigste door de rechter liggerhelft te beschouwen. Uit fig. 1e volgt:

$$\begin{aligned} M &= + \frac{1}{6} K l * \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \frac{K}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{6} = \\ &= \frac{1}{12} K l^2 - \frac{1}{48} K l^2 = \frac{1}{16} K l^2 \end{aligned}$$

De doorbuiging in het veldmidden M bedraagt dus:

$$w = \frac{K l^2}{16 EI} \quad (18)$$

Als we voor basisligger C1 in formule [518-(18e)] substitueren: $x = 1/2 l$ dan vinden we dezelfde uitkomst. Het minteken in de formule wordt veroorzaakt omdat K in de daar getekende figuur een negatief (= opbuigend) moment veroorzaakt.

De waarde $1/16 = 0,0625$ blijkt maar 2,5 % af te wijken van de maximale waarde 0,0641.

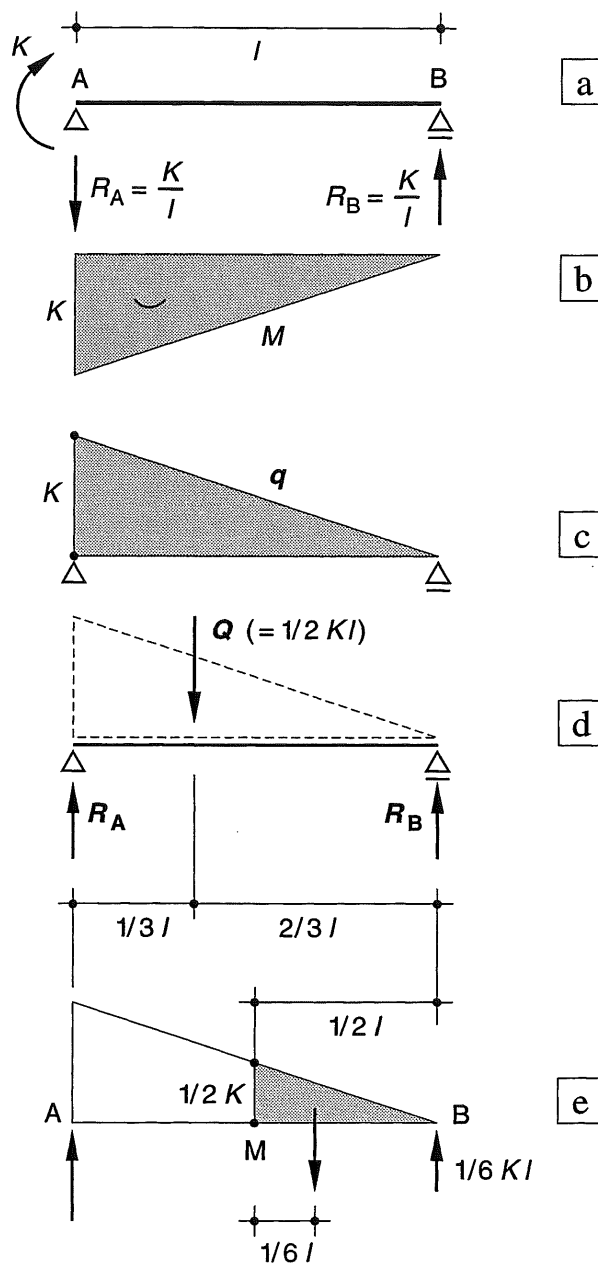


Fig. 1 Vrij opgelegde ligger belast door een koppel aan het linker-uiteinde

- Schema
- Momentenverloop
- Tweede ligger met het momentenvlak als belastingvlak
- Bepaling van de 'oplegreacties'
- Bepaling van het 'moment' in het veldmidden

23.4.3 BELASTING DOOR EEN PUNTLAST

Als een vrij opgelegde ligger wordt belast door een puntlast, kunnen relatief eenvoudige uitdrukkingen worden afgeleid voor de hoekverdraaiingen van de ligger bij de opleggingen. Hetzelfde geldt voor de doorbuiging onder de puntlast.

Hoekverdraaiingen

In fig. 1a is het schema van de ligger met de oplegreacties weergegeven en in fig. 1b het bijbehorende momentenverloop (KW-2 [228]).

In fig. 1c is een tweede overeenkomstige ligger getekend met het momentenverloop als belastingverloop. In fig. 1d zijn de resultanten bepaald van de twee driehoekig verlopende belasting-aandelen:

$$Q_a = \frac{1}{2}a \frac{ab}{l} F \quad Q_b = \frac{1}{2}b \frac{ab}{l} F \quad (19a, b)$$

Voor de bepaling van de 'oplegreactie' R_A maken we het statisch moment op om punt B:

$$\sum K_B = 0; \text{ zie fig. 1d:}$$

$$+ R_A * l - Q_a * \left(\frac{a}{3} + b\right) - Q_b * \left(\frac{2}{3}b\right) = 0 \quad (20)$$

Substitutie van (19) in (20) levert :

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{ab}{6l^2} F (a^2 + 3ab + 2b^2) = \\ &= \frac{ab}{6l^2} F (a+b)(a+2b) \text{ ofwel} \end{aligned}$$

$$R_A = \frac{ab}{6l} F (a+2b) = \frac{ab}{6l} (l+b) F \quad (21a)$$

De 'oplegreactie' R_B volgt door de afstanden a en b om te wisselen.

$$R_B = \frac{ab}{6l} (l+a) F \quad (21b)$$

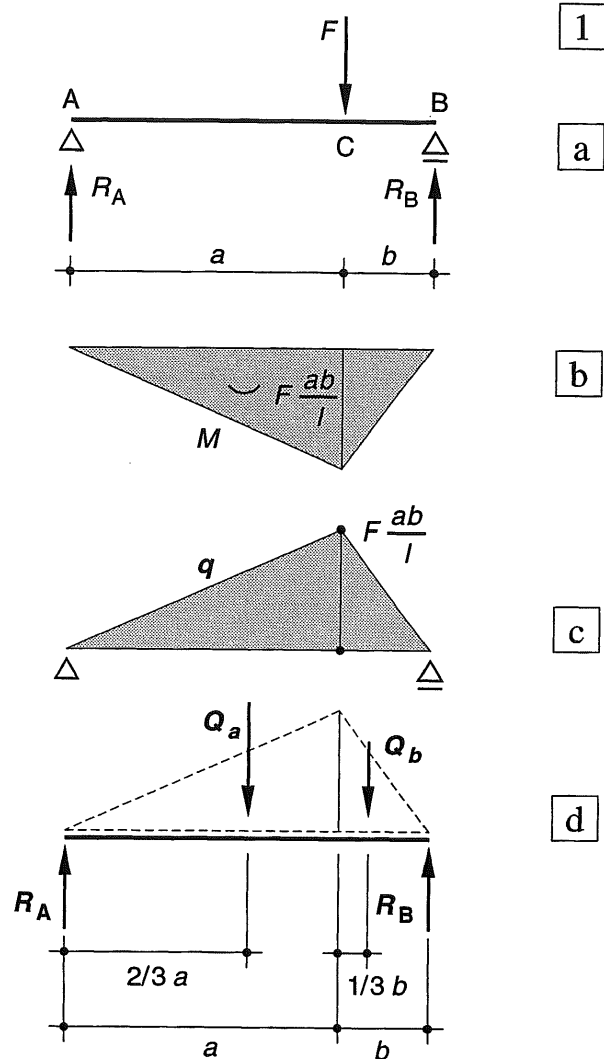


Fig. 1 Vrij opgelegde ligger met puntlast

- Schema
- Momentenverloop
- Momentenvlak uitgezet als belastingvlak
- Bepaling van de 'oplegreacties'

De hoekverdraaiingen van de punten A en B volgen dan door de formules (21a) en (21b) door EI te delen. We vinden dan

$$\varphi_A = \frac{ab}{6EI} \frac{l+b}{l} F \quad (22a)$$

$$\varphi_B = \frac{ab}{6EI} \frac{l+a}{l} F \quad (22b)$$

Doorbuiging onder de puntlast

Om de doorbuigingen te bepalen moeten we het 'buigend moment' M in de ligger bepalen dat ontstaat onder invloed het 'belastingvlak'.

In fig. 2a is het 'belastingvlak' uit fig. 1c nogmaals weergegeven. Om de zakking ter plaatse van de puntlast te bepalen moet het 'buigend moment' van het belastingvlak op dit punt worden bepaald. We beschouwen daartoe het linkerdeel van de ligger, zie fig. 2b.

$$M_C = R_A * a - Q_a * \frac{a}{3} \quad (23a)$$

Substitutie van (21a) en (19a) in (23a) levert:

$$\begin{aligned} M_C &= \frac{ab}{6l} (l+b) F a - \frac{1}{2} \frac{a^2 b}{l} F \frac{a}{3} = \\ &= \frac{a^2 b}{6l} F [(l+b) - a] = \frac{a^2 b^2}{3l} F \end{aligned} \quad (24a)$$

De doorbuiging ter plaatse van de puntlast volgt door (24a) door EI te delen en is dus gelijk aan:

$$w = \frac{a^2 b^2}{3EI} F \quad (25a)$$

Dit is dezelfde uitkomst als in [522-(33)]

Doorbuiging in het veldmidden

De maximale doorbuiging zal in de nabijheid van het veldmidden M optreden. Deze doorbuiging kan op overeenkomstige wijze worden bepaald, zie fig. 3a. Het momentenverloop als belastingvlak blijft gelijk aan dat van fig. 1, evenals de 'oplegreacties' R_A en R_B volgens de formules (21). Het 'buigend moment' M in de ligger ter plaatse van punt M is dan gelijk aan; zie fig. 3a:

$$M_M = R_A * \frac{l}{2} - Q_{l/2} * \frac{l}{6} \quad (23b)$$

Substitutie van (21a) en $Q_{l/2}$ uit fig. 3a in (23b) levert dan na deling door EI als doorbuiging:

$$w_M = \frac{Fb}{48EI} (3l^2 - 4b^2) \quad (25b)$$

Let op: $a \geq l/2$; $b \leq l/2$!; geldt ook voor (25c)

Indien meerdere puntlasten op een ligger aangrijpen, kan de doorbuiging ter plaatse van het veldmidden worden bepaald door superpositie.

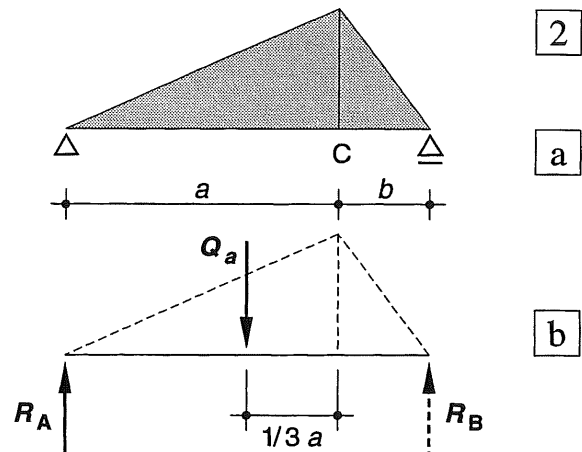


Fig. 2 Bepaling van de zakking onder de puntlast
a. 'Belastingvlak'
b. Bepaling van het 'moment' in punt C

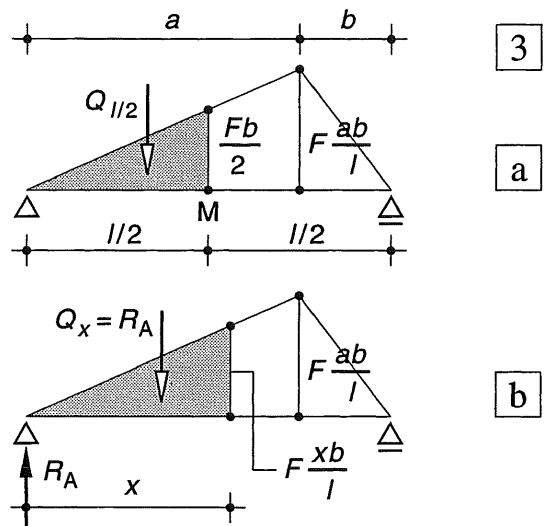


Fig. 3 Bepaling van de zakking ter plaatse van het veldmidden en van de maximale zakking
a. Bepaling van het 'moment' in punt M
b. Bepaling van het 'maximale moment'

Maximale doorbuiging

Om de maximale doorbuiging te vinden moet bij de momentenvlakmethode het 'moment' worden berekend waar de 'dwarskracht' gelijk is aan nul, zodat geldt; zie fig. 3b:

$$(R_A =) \frac{Fab}{6l}(l+b) = \frac{Fxb}{l} \frac{x}{2} \text{ zodat } x = \sqrt{\frac{a(l+b)}{3}}$$

Het 'buigend moment' in de ligger is dan gelijk aan:

$$M_x = R_A * x - R_A * (x/3) = (2/3) * R_A * x \quad (23c)$$

Substitutie van (21a) en de bovenstaande waarde van x levert na deling door EI als maximale doorbuiging:

$$w_{\max} = \frac{Fb}{3EI} \left[\frac{a(l+b)}{3} \right]^{3/2} \quad (25c)$$

23.4.4 GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING

Als laatste voorbeeld beschouwen we een vrij opgelegde ligger onder gelijkmatig verdeelde belasting. Het schema en de momentenlijn zijn weergegeven in fig. 1a, b. In fig. 1c is het momentenvlak als belastingvlak op de ligger geplaatst. De 'totale belasting' is dan gelijk aan:

$$Q = \frac{2}{3} l * \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{12} q l^3 \quad (26)$$

De oplegreacties zijn elk gelijk aan; fig. 1d:

$$R = 1/2 Q$$

De hoekverdraaiing ter plaatse van de opleggingen zijn dan gelijk aan:

$$\varphi = \frac{q l^3}{24 EI} \quad (27)$$

Voor de bepaling van het 'buigend moment' in het veldmidden verdelen we het parabolisch belastingverloop links van de symmetrieliijn in twee moten, zie fig. 1e.

$$Q_1 = \frac{2}{3} \frac{l}{2} * \frac{1}{8} q \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{q l^3}{96} \quad (28a)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \frac{l}{2} * \frac{1}{8} q l^2 = \frac{q l^3}{32} \quad (28b)$$

Voor de bepaling van het 'buigend moment' in het veldmidden beschouwen we het linkerdeel van de tweede ligger, zie fig. 1e.

$$M_M = + R_A * \frac{l}{2} - Q_1 * \frac{l}{4} - Q_2 * \frac{l}{6} \quad (29)$$

Substitutie van (27) en (28) in (29) levert:

$$\begin{aligned} M_M &= \frac{q l^3}{24} * \frac{l}{2} - \frac{q l^3}{96} * \frac{l}{4} - \frac{q l^3}{32} * \frac{l}{6} = \\ &= \frac{q l^4}{384} (8 - 1 - 2) = \frac{5}{384} q l^4 \quad (30) \end{aligned}$$

De doorbuiging in het veldmidden bedraagt:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} \quad (31)$$

De uitkomsten komen uiteraard geheel overeen met die van [512].

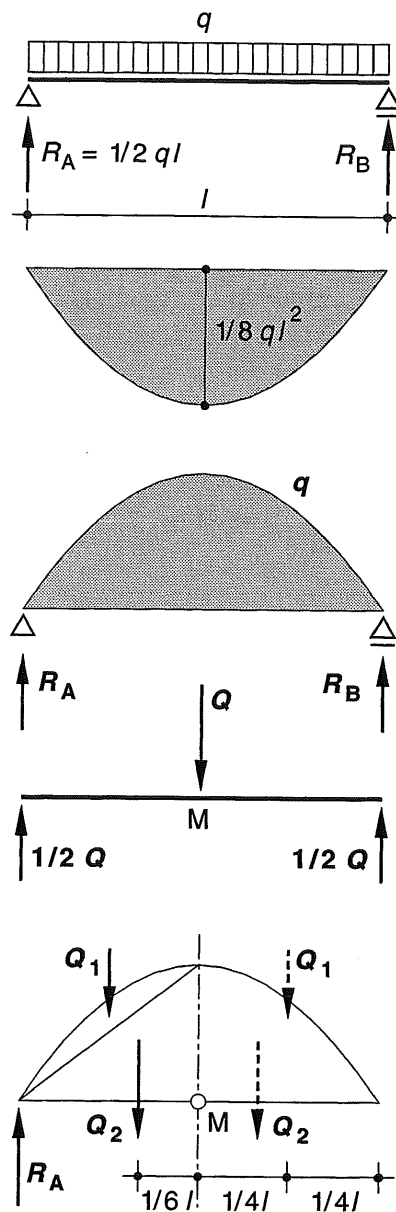


Fig. 1 Vrij opgelegde ligger onder gelijkmatig verdeelde belasting

- Schema
- Momentenlijn
- Momentenvlak als 'belastingvlak'
- Bepaling van de 'oplegreacties'
- Bepaling van het 'maximale moment' ten gevolge van het 'belastingvlak'

23.4.5 VARIERENDE BUIGSTIJFHEID

Tot nu toe zijn we steeds uitgegaan van prismatische liggers met een constante buigstijfheid.

Vooraf bij geprefabriceerde betonliggers worden de uiteinden van de ligger nabij de opleggingen vaak verzwaaard uitgevoerd, zodat de buigstijfheid daar groter is dan in het veldmidden, zie fig. 2a (zie ook KW-2, fig. [223-2], waar bovendien de liggerhoogte in het veldmidden groter is dan bij de opleggingen).

In fig. 2b is het geschematiseerde verloop van de buigstijfheid over de lengte van de prismatische ligger weergegeven. Als we de stijfheid in het middendeel van de ligger als uitgangspunt kiezen, dan zal de buigstijfheid aan de uiteinden bijv. $2 \times$ zo groot zijn.

Bij de afleiding van de betrekkingen in [566] en [567] hebben we gezien, dat we niet de grootte M_x als belastingvlak moeten uitzetten, maar de grootte M_x / EI_x .

We kunnen dus op dezelfde wijze te werk gaan als voorheen, als we het 'momentenvlak' volgens fig. 2c – dat voor een prismatische ligger geldt – aan de uiteinden met een factor 2 reduceren; zie fig. 2d. We spreken in dit geval van: *het gereduceerde momentenvlak*

In fig. 3a is het stijfheidsverloop nog wat sterker geschematiseerd. In fig. 3b is het effect weergegeven voor een puntlast en in fig. 3c voor een randmoment. De berekeningen zullen we bij voorkeur numeriek uitvoeren. Om het rekenwerk te beperken worden bepaalde liggerdelen soms als oneindig stijf beschouwd. Het aandeel van het belastingvlak valt daar dan weg; zie fig. 3d.

Bij een sterk variërend verloop in hoogte zoals bij driescharnierspanten vaak voorkomt (zie bijv. KW-3 [387-2]) kan de grootte van het gereduceerde moment op regelmatige afstanden worden bepaald. Handberekeningen kunnen dan het beste grafisch worden uitgevoerd, zie KW-1.

Fig. 3 Gereduceerde momentenvlakken

- Geschematiseerd verloop van EI
- Schema (1) plus gereduceerd momentenvlak (2)
- Belasting door een puntlast
- Belasting door een randmoment
- Als c. voor oneindig stijve liggerdelen

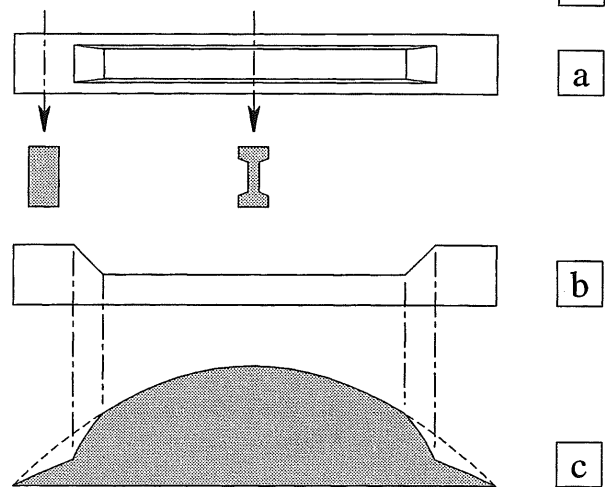
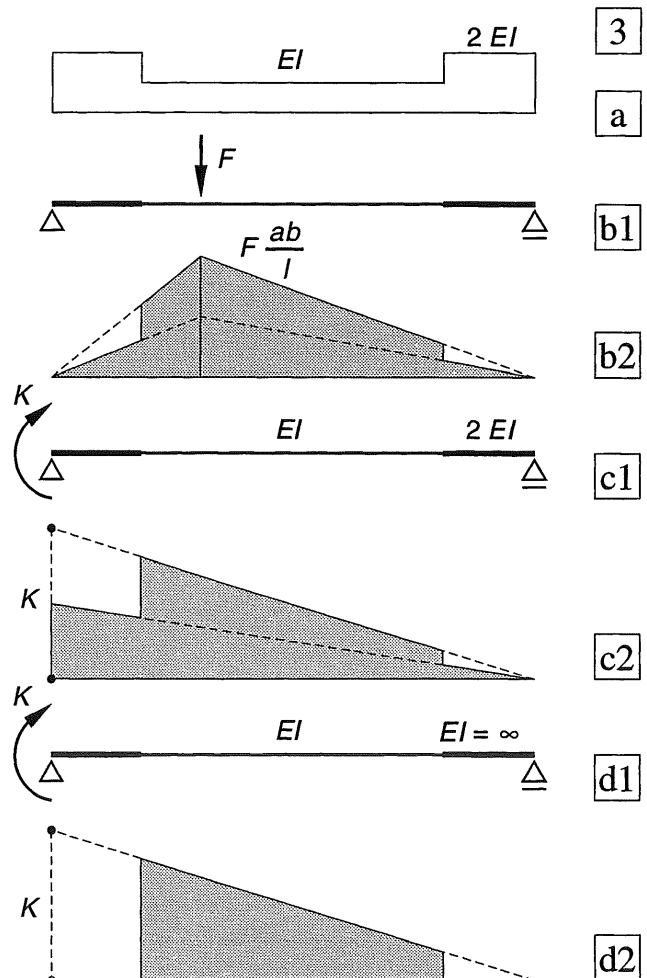


Fig. 2 Invloed van variërende stijfheid bij een ligger onder gelijkmatig verdeelde belasting

- Geprefabriceerde betonligger, met dwarsdoorsneden
- Verloop van EI over de lengte
- Momentenvlak en gereduceerd momentenvlak



23.5.1 BEPALING VAN DE ROTATIE
EN DE DOORBUIGING

Bij een eenzijdig ingeklemde ligger zijn de vervormingen door buigende momenten eveneens betrekkelijk eenvoudig te bepalen.

In fig. 1a is een eenzijdig ingeklemde ligger weergegeven onder een willekeurige belasting. Omdat de constructie statisch bepaald is opgelegd, kan het momentenverloop zonder meer worden berekend, zie fig. 1b. Dit betekent dat in elk punt van de ligger ook de kromming bekend is (zie zonodig [504-505]).

Uit de formules [504-(1) + (2)] volgt, zie fig. 2:

$$d\varphi_x = -\frac{M_x}{EI_x} dx \quad (32)$$

Hetzelfde resultaat volgt eveneens door gebruik te maken van de formules [565-(13b) en (13c)]. Ter wille van de algemeenheid is hierbij aangenomen dat het kwadratisch oppervlaktemoment I ook als een functie van x kan worden beschouwd.

We beschouwen nu in eerste instantie alleen de invloed van de kromming van één elementje dx op een afstand x_0 vanaf het linker vrije uiteinde. Hierdoor treedt een knikje op in de ligger ter grootte $d\varphi_0$, zie fig. 1c.

Als de ligger aan de rechter zijde volledig is ingeklemd geldt voor de hoekverdraaiingen:

$$\begin{aligned} \varphi &= d\varphi_0 & \text{voor } 0 < x < x_0 \\ \varphi &= 0 & \text{voor } x_0 < x < l \end{aligned} \quad (33)$$

De verticale verplaatsing van een punt van de ligger is gelijk aan:

$$\begin{aligned} w &= (x_0 - x) d\varphi_0 & \text{voor } 0 < x < x_0 \\ w &= 0 & \text{voor } x_0 < x < l \end{aligned} \quad (34)$$

Links van het knikje is de hoekverdraaiing constant en verloopt de doorbuiging lineair.

Rechts van het knikje zijn de hoekverdraaiing en de doorbuiging beide gelijk aan nul.

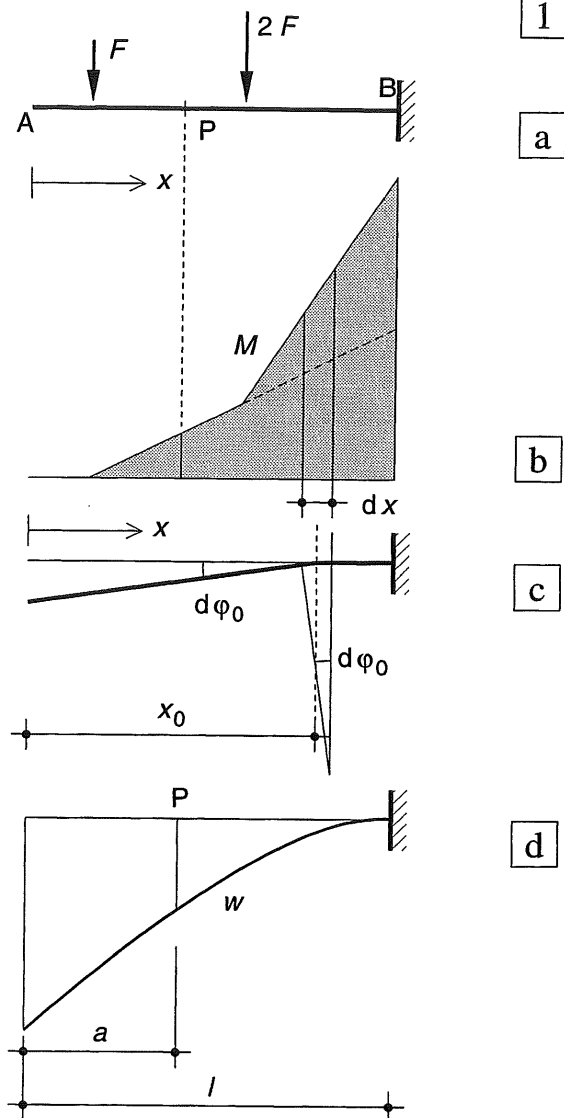


Fig. 1 Eenzijdig ingeklemde ligger

- a. Schema
- b. Momentenverloop
- c. Invloed van de kromming van één elementje
- d. Vervorming van de gehele ligger

Als we de rotatie en de doorbuiging beschouwen van een willekeurig punt P op een afstand a vanuit het (linker) vrije uiteinde, dan zijn enkel de vervormingen rechts van a maar van invloed op de rotatie en doorbuiging van punt P. De totale hoekverdraaiing volgt uit de formules (33) en wordt dus bepaald door de volgende integraal, zie fig. 1a:

$$\varphi_P = \int_a^l -\frac{M_x}{EI_x} dx \quad (35)$$

In woorden:

De hoekverdraaiing van punt P is gelijk aan het oppervlak van het gereduceerde momentenvlak tussen P en de inklemming.

De doorbuiging van punt P volgt uit de formules (34) en wordt dus bepaald door de volgende integraal, zie fig. 1a, b, d:

$$w_P = \int_a^l (x-a) \frac{-M_x}{EI_x} dx \quad (36)$$

In woorden:

De doorbuiging van punt P is gelijk aan het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak van het deel tussen P en de inklemming, opgesteld ten opzichte van de verticaal door P.

Bij de bepaling van het (echte) *buigend moment* in punt P van de uitkragende ligger beschouwen we dus het statisch moment van het belastingvlak – tussen het vrije uiteinde A en punt P – ten opzichte van de verticaal door P, zie fig. 1a, b. Bij de bepaling van de *doorbuiging* in punt P van de uitkragende ligger beschouwen we het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak – tussen punt P en de inklemming B – ten opzichte van de verticaal door P, zie fig. 3. Voor de numerieke uitwerking is het oppervlak daartoe in drie driehoeken verdeeld.

Een en ander wordt veroorzaakt door de verwisseling van de overeenkomstige randvoorwaarden van de gesplitste differentiaalvergelijkingen [566-(15) en (16)], zoals in fig. [567-2] is weergegeven.

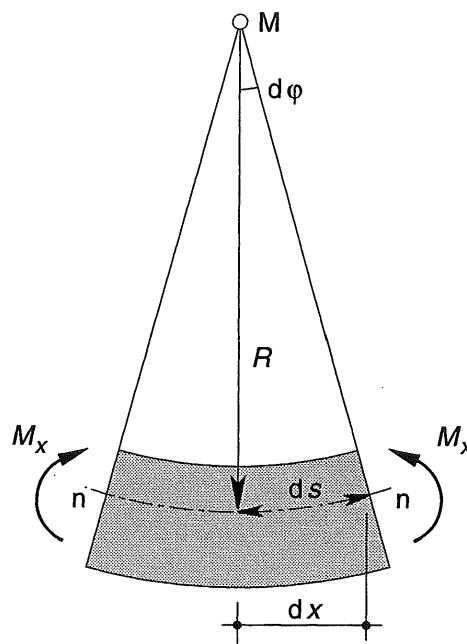


Fig. 2 Relatie tussen buigend moment, kromming en hoekverdraaiing

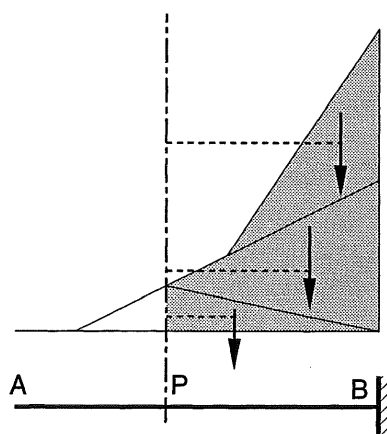


Fig. 3 Uitkragende ligger

a. Bepaling van de hoekverdraaiing φ en de doorbuiging w in punt P

Hoekverdraaiing: oppervlak van het gereduceerde momentenvlak tussen P en B

Doorbuiging: statisch moment van het gereduceerde momentenvlak (tussen P en B) ten opzichte van de verticaal door P

Voor de bepaling van de doorbuiging van de hele ligger kunnen we dus net doen alsof de ligger in A volledig is ingeklemd en wordt belast door het gereduceerde momentenvlak. De hieruit volgende 'momentenlijn' is dan de doorbuigingslijn

23.5.2 RECAPITULATIE VAN DE VERGEET-ME-NIETJES

De hoekverdraaiingen en doorbuigingen van de basisliggers serie B [514-515] zijn snel te bepalen op de wijze die in [575] is besproken.

Basisligger B1:

Koppel op het vrije ligger-uiteinde. In fig. 1a is het schema weergegeven en in fig. 1b de momentenlijn. Voor de hoekverdraaiing van punt A geldt dan, zie fig. 1c, d:

$$\varphi_A = \frac{K * l}{EI} \quad (37)$$

Voor de doorbuiging van punt A geldt dan, zie fig. 1d:

$$w_A = \frac{K l * \frac{l}{2}}{EI} = \frac{K l^2}{2 EI} \quad (38)$$

Basisligger B2:

Puntlast op het vrije ligger-uiteinde.

In fig. 2a is het schema weergegeven en in fig. 2b de momentenlijn. In fig. 2c is het momentenvlak opgevat als belastingvlak. De hoekverdraaiing van punt A bedraagt dan:

$$\varphi_A = \frac{\frac{1}{2} * F l * l}{EI} = \frac{F l^2}{2 EI} \quad (39)$$

De doorbuiging van punt A is dan gelijk aan, zie fig. 2c:

$$w_A = \frac{\frac{1}{2} F l^2 * \frac{2}{3} l}{EI} = \frac{F l^3}{3 EI} \quad (40)$$

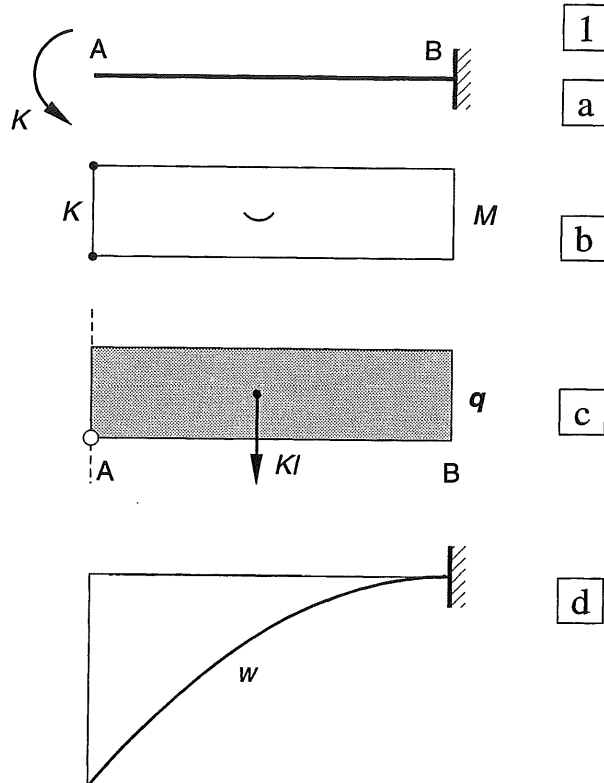


Fig. 1 Basisligger B1

- a. Schema
- b. Momentenlijn
- c. Momentenvlak opgevat als belastingvlak
- d. Doorbuigingsverloop

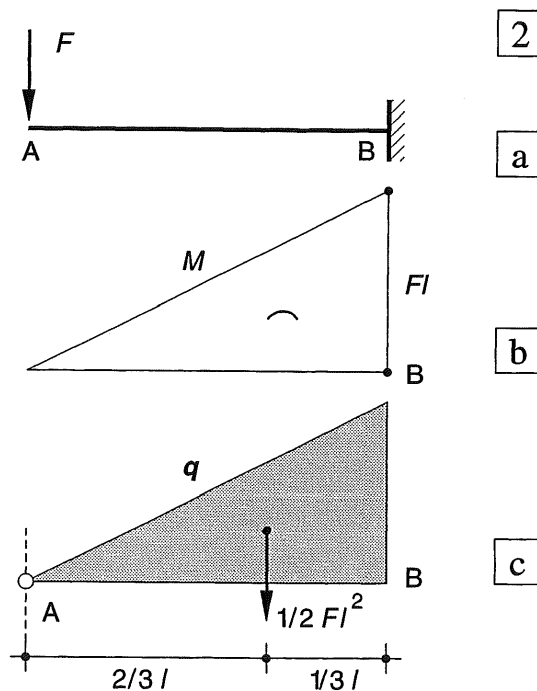


Fig. 2 Basisligger B2

- a. Schema
- b. Momentenlijn
- c. Momentenvlak opgevat als belastingvlak

Basisligger B3

Gelijkmatig verdeelde belasting over de gehele lengte van de ligger. Het belastingschema is weergegeven in fig. 3a en de momentenlijn in fig. 3b. In fig. 3c is het momentenvlak opgevat als belastingvlak. We beschouwen dit als het verschil van een driehoekig verlopende belasting en een parabolisch verlopende belasting.

De hoekverdraaiing van punt A bedraagt dan:

$$\varphi_A = \frac{Q_1 - Q_2}{EI} \quad \text{ofwel,}$$

$$\varphi_A = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} q l^2 * l - \frac{2}{3} * \frac{1}{8} q l^2 * l}{EI} = \frac{q l^3}{6 EI} \quad (41)$$

In fig. 3c zijn ook de zwaartepunten van beide belastingaandelen weergegeven. De doorbuiging van punt A bedraagt dan:

$$w_A = \frac{Q_1 * \frac{2}{3} l - Q_2 * \frac{1}{2} l}{EI} \quad \text{ofwel}$$

$$w_A = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} q l^2 * l * \frac{2}{3} l - \frac{2}{3} * \frac{1}{8} q l^2 * l * \frac{1}{2} l}{EI}$$

$$w_A = \frac{q l^4}{8 EI} \quad (42)$$

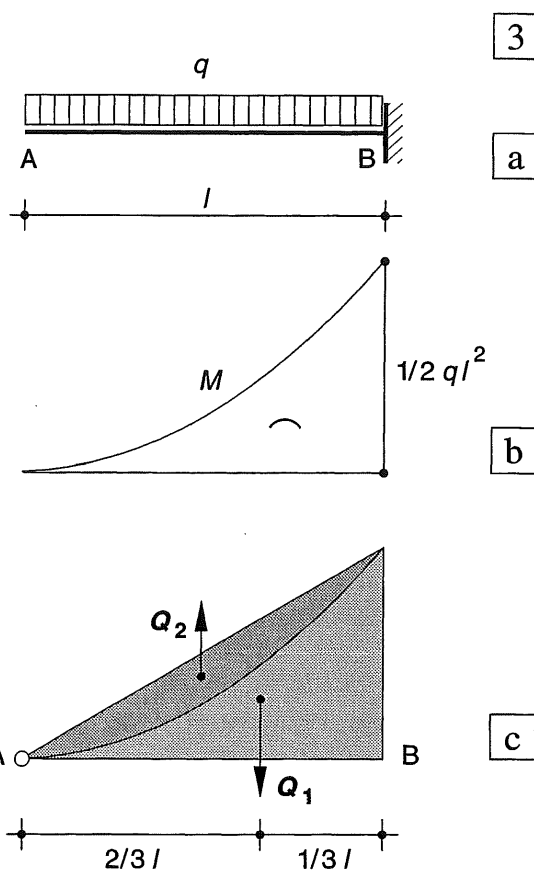


Fig. 3 Basisligger B3

- Schema
- Momentenlijn
- Momentenvlak in twee delen gesplitst (driehoek - parabool) en opgevat als belastingvlak

23.5.3 ALGEMENE TOEPASSING VAN MOMENTENVLAK-METHODE II

Momentenvlak-methode II kan ook in een veel ruimere zin worden toegepast.

We gaan uit van een willekeurige ligger, waarvan het momentenvlak bekend is, zie fig. 1. Als we de onderlinge verplaatsing tussen twee willekeurige punten P en Q willen bepalen, gaan we als volgt te werk.

Onder invloed van de belasting en de oplegreac-ties is de ligger volledig in evenwicht. Als we ons deze ligger gemakshalve als vrij zwevend voorstellen, kunnen we hem in punt Q in de hand nemen en zodanig verdraaien, dat de ligger daar ter plaatse juist horizontaal is. We kunnen de ligger dan als volledig ingeklemd beschouwen in Q. De hoekverdraaiing en zakking van P ten opzichte van Q is dan op de gebruikelijke wijze te bepalen.

Herlees zonodig KW-2 [237], waar een vervormde ligger – afhankelijk van de randvoorwaarden – ook in allerlei standen is geplaatst !

In fig. 2 is uitgegaan van een gelijkmatig verdeelde belasting op een deel van een ligger, die daar ter plaatse een parabolisch momentenverloop veroorzaakt. In fig. 2a is een liggerdeel weergegeven met een positief buigend moment en in fig. 2b met een negatief buigend moment. In beide gevallen kan het momentenvlak worden gesplitst in twee driehoeken en een parabool, zodat het oppervlak en het statisch moment van het (gereduceerde) momentenvlak gemakkelijk kan worden bepaald, zie ook KW-2 [246-248].

NB:

- de *hoekverdraaiing* van P ten opzichte van Q en omgekeerd is altijd gelijk,
- de *verplaatsing* van P ten opzichte van Q en omgekeerd is ten opzichte van een horizontale as in principe niet gelijk.

Kijk voor de richting van de verplaatsing naar het buigteken van het moment !

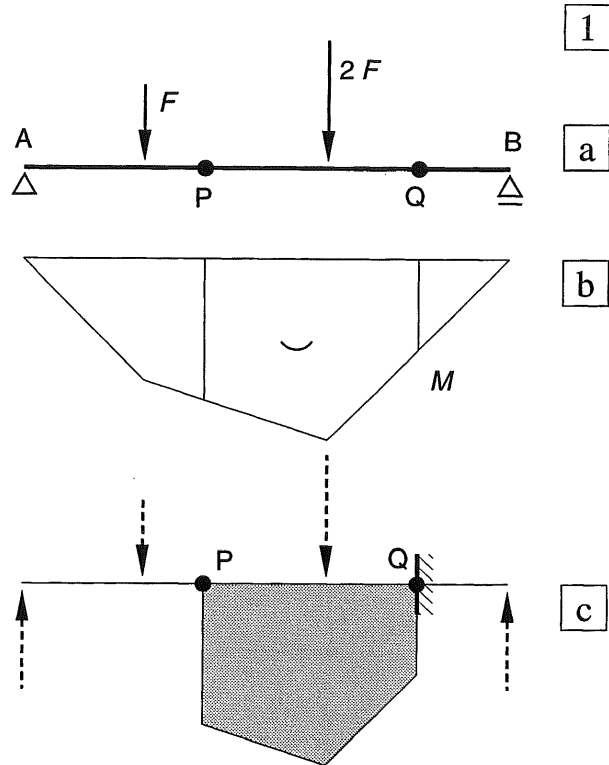


Fig. 1 Bepaling van de onderlinge verplaatsing van de punten P en Q.

- a. De ligger is in evenwicht onder invloed van alle daarop werkende krachten
- b. Momentenvlak van de ligger
- c. Ligger ingeklemd beschouwd in punt Q

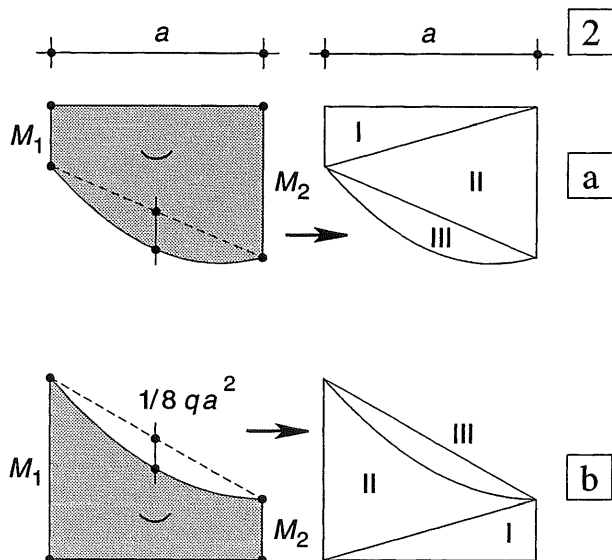


Fig. 2 Splitsen van een deel van het momentenvlak in twee driehoeken en een parabool

- a. Bij een positief momentenverloop (I + II + III)
- b. Bij een negatief momentenverloop (I + II – III)

23.6.1 CONSTRUCTIEVORMEN

Tot nu toe hebben we ons uitsluitend bezig gehouden met lineaire constructie-delen die een rechte as bezitten. Gekromde liggers worden meer dan eens bij hallen aangetroffen, vooral bij gebruik van driescharnierspanten; fig. 3a1. De af te leiden betrekkingen kunnen echter ook met vrucht worden gebruikt voor geknikte spanten zoals weergegeven in fig. 3a2. Als één of meer scharnieren voorkomen moeten we de onderdelen tussen twee opeenvolgende scharnieren eerst afzonderlijk beschouwen en ze daarna weer aaneensluiten, zie [581]. Alleen bij een volledig ingeklemd portaal, zoals in fig. 3b2, kunnen we de vervormingen rechtstreeks bepalen.

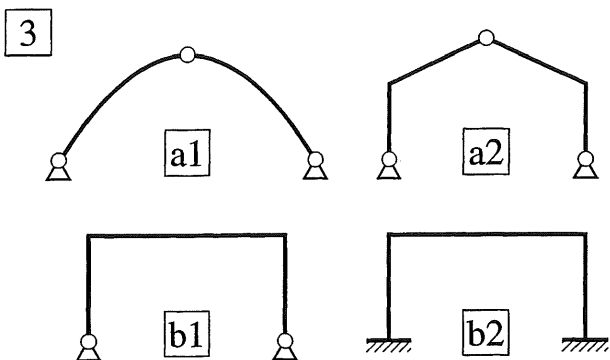


Fig. 3 Constructievormen
 a. Driescharnierspanten
 b. Tweescharnierspant en volledig ingeklemd portaal

23.6.2 BEPALING VERVORMINGEN

In fig. 4 is een willekeurig gebogen staaf weergegeven die aan één zijde volledig is ingeklemd. De constructie is statisch bepaald en het momentenverloop kan relatief eenvoudig worden bepaald, zoals voor een willekeurig punt P is aangegeven voor één uitwendige kracht F.

Voor de bepaling van de vervormingen worden de afstanden langs de gebogen staaf gemeten en met s aangegeven. Onder invloed van het buigend moment in P ondergaat een elementje ds daar ter plaatse een hoekverdraaiing, die rechtstreeks volgt uit formule [516-(27)]:

$$d\varphi_s = \frac{M_s}{EI_s} ds \quad (38)$$

We beschouwen vervolgens de verplaatsing van een willekeurig punt Q uitsluitend ten gevolge van de hoekverdraaiing in punt P, zie fig. 4. De verplaatsing staat loodrecht op de lijn PQ en bezit de grootte:

$$du = a * d\varphi_s \quad (39)$$

We ontbinden de verplaatsing du in punt Q in zijn orthogonale componenten:

$$du_x = du \sin \alpha = a \sin \alpha d\varphi_s = y_a d\varphi_s \quad (40a)$$

$$du_y = du \cos \alpha = a \cos \alpha d\varphi_s = x_a d\varphi_s \quad (40b)$$

De horizontale verplaatsing van punt Q volgt dus door het statisch moment van dφs op te maken om de horizontale as door punt Q (van het staafdeel tussen de inklemming O en punt Q)

De verticale verplaatsing van punt Q volgt dan door het statisch moment van dφs op te maken om de verticale as door punt Q. De totale verplaatsing van punt Q volgt dan door integratie; substitutie van (38) in (40) levert de formules (41a,b); integratie van (38) levert dan de hoekverdraaiing van Q ten opzichte van O; formule (41c):

$$u_x = \int \frac{M_s}{EI_s} y ds \quad (41a)$$

$$u_y = \int \frac{M_s}{EI_s} x ds \quad (41b)$$

$$\varphi = \int \frac{M_s}{EI_s} ds \quad (41c)$$

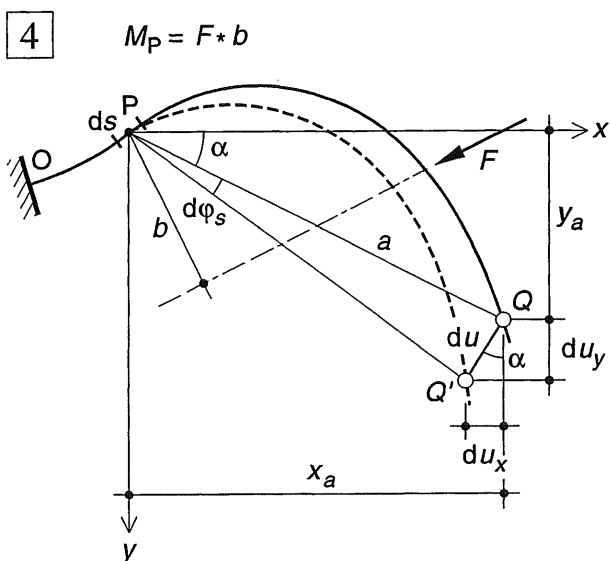


Fig. 4 Verplaatsing van een gebogen staaf ten gevolge van één rotatie dφ ter plaatse van punt P

23.6.3 VOLLEDIG INGEKLEMD PORTAAL

Het schema van het portaal is weergegeven in fig. 1a. Het momentenverloop kan worden bepaald met behulp van de formules [555-(16) en (17b)], met de notaties volgens fig. [554-1a].

Uit fig. 1a van blad 580 volgt dan met behulp van (16):

$$\vartheta = \frac{EI_2 l_1}{EI_1 l_2} = \frac{EI_2 h}{EI_1 l} = 4 \frac{1}{2} = 2 \quad (a)$$

Het moment M_1 in de punten B en C volgt uit (17b):

$$M_1 = \frac{4}{4+2\vartheta} \frac{ql^2}{12} = \frac{ql^2}{24} \quad (= \frac{1}{3} M_0) \quad (b)$$

Het momentenverloop is weergegeven in fig. 1b. In fig. 1c is dit momentenverloop gesplitst in een aantal basisgevallen; voor de stijl zijn dit de delen A_1 en A_2 (driehoek + rechthoek) en voor de halve regel de delen A_3, A_4 en A_5 (rechthoek + driehoek + parabool). De oppervlakken van deze momentenvlakken bedragen:

$$\begin{array}{l} A_1 : -\frac{1}{2} \frac{3}{2} M_1 h = -\frac{3}{4} M_1 h \\ A_2 : +\frac{1}{2} M_1 h \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} A_3 : -\frac{1}{2} M_1 l \\ A_4 : +\frac{1}{2} M_0 \frac{1}{2} l = +\frac{1}{4} M_0 l \\ A_5 : +\frac{2}{3} \frac{1}{4} M_0 \frac{1}{2} l = \frac{1}{12} M_0 l \end{array} \right.$$

Omdat het spantdeel ABM volledig is ingeklemd in A, kan de verticale verplaatsing van M worden bepaald door het spantdeel ABM als het ware in M ingeklemd te denken en vervolgens het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak op te maken, ten opzichte van de verticaal door M. Daartoe worden de momentenvlakken A_1 en A_2 gedeeld door EI_1 en de vlakken A_3, A_4 en A_5 door EI_2 . Het zwaartepunt van elk momentenvlak wordt eerst geprojecteerd op het bijbehorende liggerdeel (dit zijn de rondjes in fig. 1c). De afstand van elk geprojecteerd zwaartepunt tot de verticaal door punt M geeft dan de 'arm' aan waarmee het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak kan worden berekend. Een positief momentenvlak veroorzaakt trek aan de binnenzijde van het portaal en levert dus een verplaatsing omhoog, zie fig. 1d. Gemakshalve zullen we de *opwaarts* gerichte verplaatsing van punt M berekenen; als hier een negatief getal uitkomt ondergaat M dus een *neerwaarts* gerichte verplaatsing. Bij rotaties worden alleen de gereduceerde momentenvlakken opgeteld, waarbij positieve momentenvlakken een linksdraaiende rotatie veroorzaken

Verticale verplaatsing van punt M:

$$u_y \uparrow = \frac{1}{EI_1} \left[+A_1 \frac{l}{2} + A_2 \frac{l}{2} \right] + \frac{1}{EI_2} \left[+A_3 \frac{l}{4} + A_4 \frac{l}{6} + A_5 \frac{l}{4} \right]$$

Na substitutie van A_1 t/m A_5 met hun teken, gaat deze betrekking over in:

$$u_y \uparrow = -\frac{1}{8EI_1} M_1 hl - \frac{1}{8EI_2} M_1 l^2 + \frac{1}{16EI_2} M_0 l^2$$

Substitutie van $M_1 = \frac{1}{3} M_0$; $h = \frac{l}{2}$; $EI_1 = \frac{1}{4} EI_2$ levert – na omdraaiing van het teken – de volgende neerwaarts gerichte verplaatsing:

$$u_y \downarrow = \frac{M_0 l^2}{4EI_2} \left[+\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right] = \frac{M_0 l^2}{16EI_2} = \frac{ql^4}{128EI_2}$$

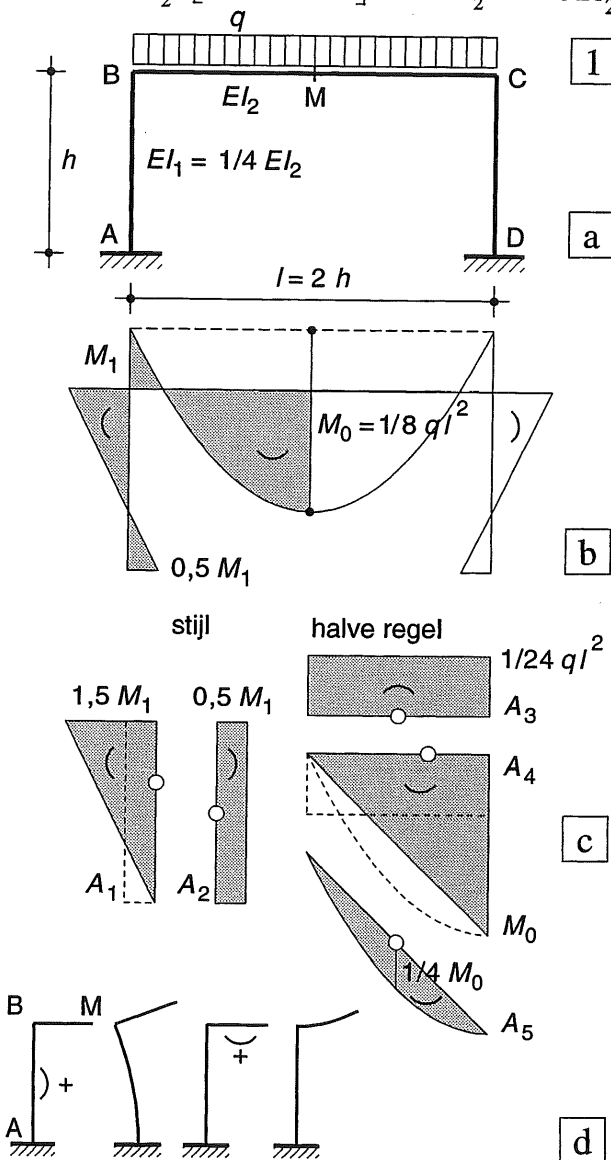


Fig. 1 Volledig ingeklemd portaal
 a. Schema b. Momentenverloop
 c. Splitsing van het momentenvlak in stijl en halve regel met geprojecteerde zwaartepunten
 d. Uitbuiging bij een positief moment in alleen de stijl òf alleen de regel

23.6.4 DRIESCHARNIERSPANT

Om een globale indruk te verkrijgen van de verplaatsingen bij een driescharnierspant onder windbelasting, is een vereenvoudigde berekening uitgevoerd. Hierbij is de windbelasting op een vertikaal vlak geprojecteerd en vervolgens geconcentreerd in de hoekpunten van de linker spanthelft, zie fig. 2a. De oplegreacties en het momentenverloop zijn dan eenvoudig te bepalen, zie fig. 2b; herlees zondig KW-3 [397].

Voor de bepaling van de verplaatsingen zijn de spanthelften ABS en SCD elk afzonderlijk beschouwd en volledig ingeklemd gedacht in A, resp. D. Voor elke spanthelft kan de verticale verplaatsing u_y van punt S worden bepaald door het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak op te maken om een verticale lijn door punt S. Voor de horizontale verplaatsing u_x gebeurt dit om een horizontale lijn door punt S. De momentenvlakken A_1 en A_2 bezitten de grootte:

$$A_1 = \frac{1}{2} qa^2 a = \frac{1}{2} qa^3 \quad (A'_1 = \frac{1}{2} A_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} qa^2 a \sqrt{5} = \frac{1}{2} qa^3 \sqrt{5} \quad (A'_2 = \frac{1}{2} A_2)$$

Uit het momentenvlak van spantdeel ABS volgt, dat bij een volledige inklemming in A, punt S naar links en naar boven verplaatst.

$$\begin{aligned} u_x \leftarrow &= \frac{1}{EI} \left(A_1 \frac{4}{3} a + A_2 \frac{2}{3} a \right) = \\ &= \frac{qa^4}{EI} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{5} \right) = 1,412 \frac{qa^4}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y \uparrow &= \frac{1}{EI} \left(A_1 2a + A_2 \frac{2}{3} 2a \right) = \\ &= \frac{qa^4}{EI} \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{5} \right) = 2,491 \frac{qa^4}{EI} \end{aligned}$$

Voor spantdeel SCD zijn de verplaatsingen van punt S naar links en naar beneden gericht, de numerieke waarden bedragen de helft van die voor de linker spanthelft.

In fig. 2c zijn deze verplaatsingen vergroot weergegeven. Om beide spanthelften weer in S aaneen te sluiten, worden de volledige inklemmingen in A en D verbroken en door scharnieren vervangen. De linker spanthelft moet dan om punt A naar rechts draaien en punt S beschrijft een cirkelboog met de afstand AS als straal. Bij kleine verplaatsingen wordt weer de raaklijn aan de cirkelboog aangehouden zodat punt S loodrecht op de lijn AS verplaatst. De rechter spanthelft moet om punt D eveneens naar rechts draaien. Het snijpunt van beide loodlijnen geeft dan het verplaatste punt S weer. Herlees zondig [558-559].

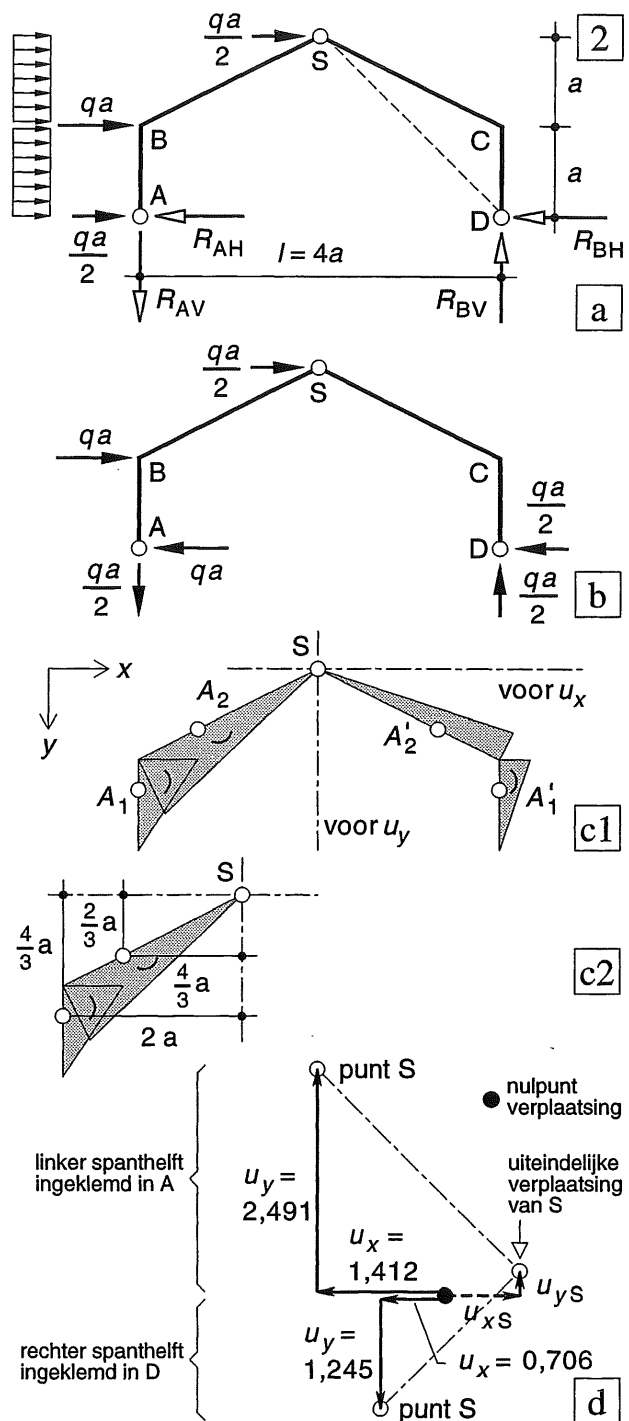


Fig. 2 Driescharnierspant onder horizontale belasting
a. Schema met actie- en reactiekrachten
b. Schema met resulterende uitwendige krachten
c1. Momentenlijn met geprojecteerde zwaartepunten
c2. 'Arm' voor de momentenvlakken A_1 en A_2
d. Verplaatsing van punt S als beide spanthelften in A, resp. D zijn ingeklemd, en uiteindelijke ligging van S na rotatie van beide spanthelften

24 KNIK

Knikformules van Euler voor prismatische staven

24.1 INLEIDING

24.1.1 HET VERSCHIJNSEL KNIK

Als op een prismatische staaf alleen een normaalkracht N werkt, spreken we van centrische trek of druk. Voor het overbrengen van *trekkrachten* behoeft de staaf geen buigstijfheid te bezitten. Zolang de trekspanningen niet zo hoog worden dat bezwijken optreedt, kan een touw, een ketting of een kabel net zo goed trekkrachten overbrengen als een buigstijf I-profiel. Maar terwijl het I-profiel ook uitstekend centrische drukkrachten kan overbrengen, is dit voor een touw of een ketting niet mogelijk.

Het volledig ontbreken van enige buigstijfheid bij een staaf maakt het overbrengen van drukkrachten dus onmogelijk. Als de buigstijfheid van een staaf gering is, kan ook maar een geringe centrische drukkracht worden overgebracht. Als de drukkracht op zo'n staaf geleidelijk wordt opgevoerd, tracht de staaf zich vrij snel te onttrekken aan het overbrengen van de centrische druk, en wel door sterk uit te buigen. Het verschijnsel is gemakkelijk te visualiseren door bijv. een dunne lineaal centrisch te drukken.

Zodra deze uitbuiging begint op te treden, blijkt een heel kleine vergroting van de drukkracht voldoende te zijn, om de uitbuiging zeer sterk te doen toenemen.

Ons eerste basisbeginsel – evenredigheid tussen kracht en vervorming – blijkt opeens niet meer te gelden. Een sterk toenemende uitbuiging van de staaf betekent ook een sterk toenemend buigend moment. Het lineaire constructiedeel gedraagt zich dus niet langer als een staaf, maar voornamelijk als een ligger.

Als we deze uitbuiging van de staaf niet weten tegen te gaan dan zullen de buigende momenten in de staaf zo groot worden, dat bezwijken van de staaf onafwendbaar is.

Knik is een zeer verraderlijk verschijnsel, dat plotseling zonder enige waarschuwing kan optreden. Bij betonconstructies die veelal een grote stijfheid bezitten, speelt het verschijnsel niet zo'n grote rol, maar bij staalconstructies en soms ook bij houtconstructies, moet er terdege rekening mee worden gehouden.

24.1.2 INVLOED VAN DE VERVORMINGEN

Tot nu toe hebben we bij alle statisch bepaalde constructies steeds aangenomen dat de grootte van de vervormingen recht evenredig is met de grootte van de belasting en dat de daaruit voortvloeiende momenten ook weer evenredig zijn met de belasting, zie fig. 1.

Bij statisch onbepaalde constructies gebruiken we de vervormingen van het statisch bepaalde hoofdsysteem om gappingen te sluiten of zakkingen ongedaan te maken, om zodoende de hoofdkrachtenwerking in de statisch onbepaalde constructie te kunnen bepalen. Maar als we dat eenmaal hebben gedaan, gaan we er weer vanuit dat een evenredige toename van alle belastingen, met een daarbij behorende evenredige toename van alle vervormingen, de onderlinge krachtsverdeling niet zal beïnvloeden. Zolang de voornaamste belastingen loodrecht op de staaf- as aangrijpen is deze handelwijze volkomen correct.

Zodra de normaalkrachten in een ligger echter belangrijk worden ten opzichte van de buigende momenten, kan de grootte van de vervorming de krachtswerking wel degelijk gaan beïnvloeden. Als voorbeeld beschouwen we de drie kolommen in fig. 2. In fig. 2a grijpt er alleen een koppel aan in punt B. Het buigend moment over de gehele hoogte van de kolom blijft constant.

In fig. 2b wordt het koppel gevormd door een kracht F met een excentriciteit e . Hierdoor ontstaat over de lengte van AB eveneens een constant moment $M = F * e$.

Kijken we echter wat nauwkeuriger dan zal door de verplaatsing u_x van punt B, het punt C evenveel naar rechts verplaatsen en het maximale moment in punt A is eigenlijk gelijk aan:

$$M = F * (e + u_x)$$

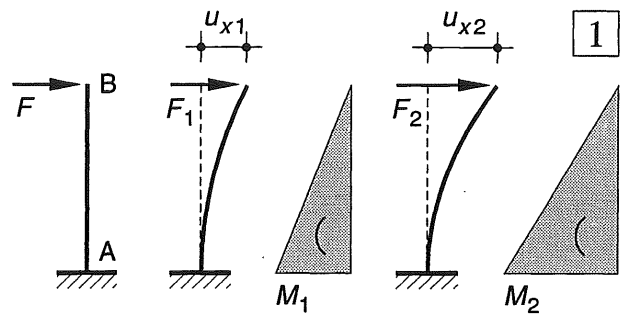
In het (verplaatste) punt B vinden we weer:

$$M = F * e.$$

Aangezien $u_x \ll e$ is het weer volkomen gebruikelijk om deze invloed te verwaarlozen.

In fig. 2c1 wordt de kolom centrisch belast door de drukkracht F . Zolang geldt dat $F < F_k$ blijft de staaf volkomen recht. De kracht F_k wordt de knikkracht genoemd. Zodra echter geldt dat $F \geq F_k$ zal de kolom zijdelings uitbuigen, zie fig. 2c2.

Het buigend moment in B is dan nog steeds gelijk aan nul, maar in punt A is het toegenomen tot: $M = F * u_x$; M_{\max} is nu evenredig met de uitbuiging. Aangezien u_x vrijwel onbeperkt blijkt toe te nemen bij zeer langzaam toenemende $F (> F_k)$, zal ook het buigende moment M_{\max} zeer grote waarden kunnen aannemen.



$$u_{x2} : u_{x1} = F_2 : F_1 = M_2 : M_1$$

Fig. 1 Evenredigheid tussen uitwendige krachten, vervormingen en snedekrachten (M, V, N)

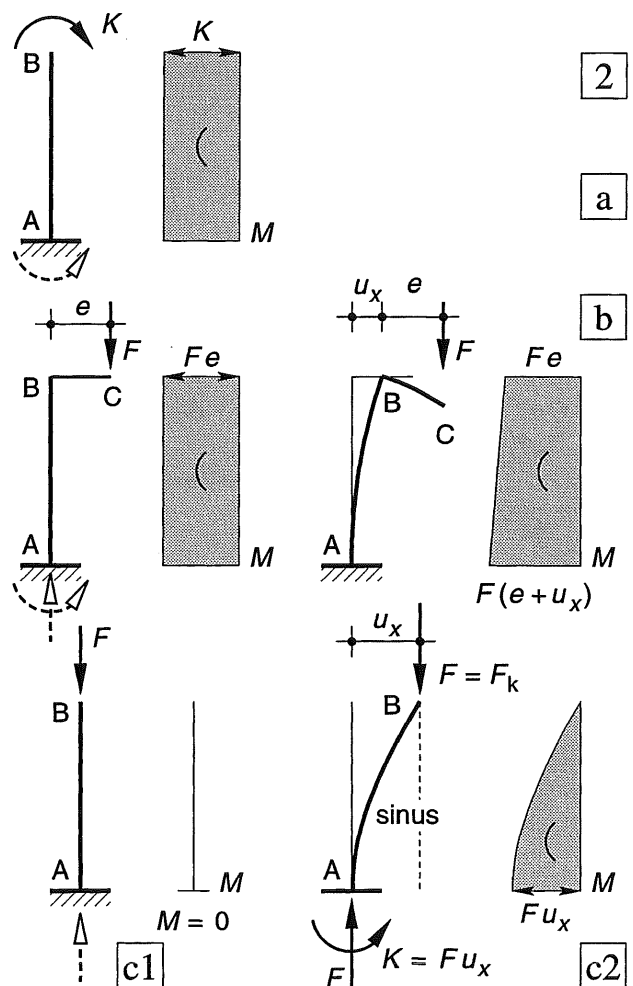


Fig. 2 Invloed van de vervormingen van een kolom op het momentenverloop

- Kolom belast door een koppel
 - Kolom - via een dwarsstaaf - belast door een excentrisch geplaatste puntlast
 - Kolom belast door een centrische puntlast
- $F < F_k$ dus geen knikverschijnsel
 - $F \geq F_k$ dus wèl een knikverschijnsel

24.2.1 KNIKBEREKENING VOLGENS EULER

De wiskundige Euler is de eerste geweest, die een formule heeft weten af te leiden voor de maximale drukkracht, die door een prismatische staaf kan worden overgebracht. Deze kracht wordt aangeduid als de *knikkracht* F_k .

We beschouwen een prismatische staaf AB die scharnierend is opgelegd volgens fig. 1a. Verplaatsingen loodrecht op het vlak van tekening worden hierbij verhinderd. Punt A is een vast scharnier terwijl punt B door de pendelstaaf BC alleen maar verticaal kan verplaatsen.

In punt B wordt een verticale kracht F aangebracht, die een centrische druk in de staaf AB veroorzaakt. De staaf wordt hierdoor iets korter, maar blijft verder gewoon recht, zoals in het schema van fig. 1a is aangegeven. Als we de kracht F langzaam opvoeren, dan blijkt de staaf plotseling een gebogen vorm aan te nemen, zie fig. 1b. We hebben dus kennelijk de knikkracht F_k bereikt. We houden deze kracht verder constant en gaan na hoe het mogelijk is dat de kracht op deze wijze kan worden overgebracht.

We kiezen de x -as langs de staafas. Omdat het kennelijk een buigingsverschijnsel betreft, worden de verplaatsingen loodrecht op de staafas aangegeven met w , zie fig. 1c (vergelijk zo nodig [505]). De uitwendige kracht noemen we voorlopig nog F .

De uitbuiging w is een functie van x , die voorlopig nog onbekend is. We weten alleen dat geldt: $w = 0$ voor $x = 0$ en $x = l$.

Op een willekeurige afstand x brengen we een snede aan in de staaf, en we gaan na wat door deze snede moet worden overgebracht, zie fig. 1d.

Dit is (nog steeds) een normaalkracht:

$$N_x = -F \quad (1)$$

plus een buigend moment:

$$M_x = F * w \quad (2)$$

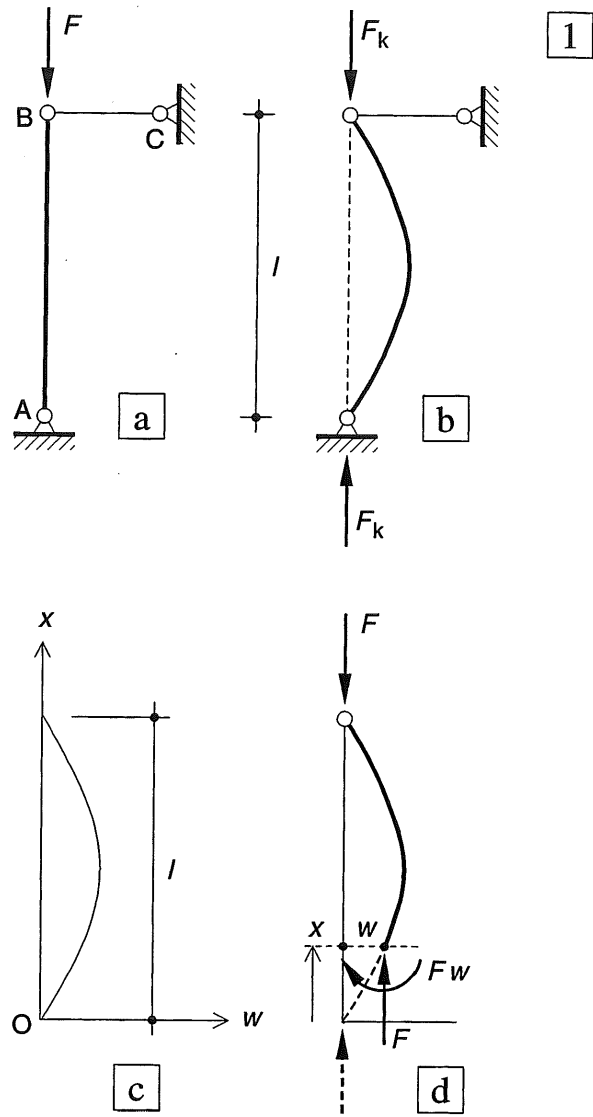


Fig. 1 Knikstaaf volgens Euler.

NB: de relatief kleine verplaatsingen in de richting van de staafas worden nooit getekend

- Schema
- Uitgeknikte vorm als $F = F_k$
- Assenkruis met vervormingslijn
- Snedekrachten op een afstand x

2

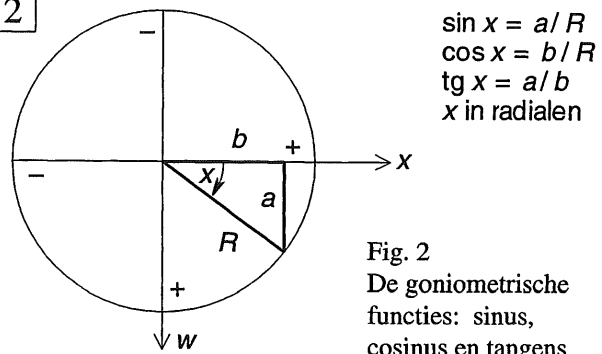


Fig. 2
De goniometrische functies: sinus, cosinus en tangens

Het buigend moment en de kromming van een ligger (of een staaf) zijn echter aan elkaar gekoppeld. Hiervoor is in [504-505-(4)] de volgende betrekking afgeleid:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} \quad (3)$$

We substitueren vervolgens formule (2) in formule (3), die daardoor overgaat in:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F \cdot w}{EI} = 0 \quad (3a)$$

Voor de oplossing van deze differentiaal-vergelijking stellen we:

$$F/EI = a^2 \quad (4)$$

met als dimensie $a = \sqrt{F/EI} = [l^{-1}]$

Substitutie van (4) in (3a) levert:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + a^2 w = 0 \quad (3b)$$

Het blijkt dat een bruikbare oplossing wordt verkregen met behulp van de sinusfunctie:

$$w = A \sin ax \quad (5)$$

Achtereenvolgende differentiatie levert:

$$dw/dx = aA \cos ax \quad (5a)$$

$$d^2 w/dx^2 = -a^2 A \sin ax \quad (5b)$$

Substitutie van (5b) en (5) in (3b) toont dan de geldigheid van de gekozen oplossing aan:

$$-a^2 A \sin ax + a^2 A \sin ax = 0$$

Vervolgens moeten we de juiste randvoorwaarden voor de sinusfunctie bepalen. Hierbij moet gelden: $w = 0$ voor $x = 0$ en $x = l$.

Aan de eerste voorwaarde wordt automatisch voldaan. Substitutie van de tweede voorwaarde in formule (5) levert:

$$0 = A \sin al \quad (6)$$

De sinus is dus nul voor, zie fig. 2 en 3:

$$al = 0; \pi; 2\pi; 3\pi; \dots \quad (7)$$

De voorwaarde $al = 0$ houdt in:

$$a = 0, \text{ dus ook } a^2 = 0.$$

Uit (4) volgt dan: $F = 0$

en uit (5) volgt: $w = 0$

De conclusie is (achteraf) voor de hand liggend: als de staaf niet wordt belast zal hij ook niet uitbuigen.

We proberen daarom de tweede voorwaarde:

$al = \pi$, dus ook na kwadrateren:

$$a^2 = \pi^2/l^2$$

Substitutie van deze waarde in (4) levert:

$$\frac{F}{EI} = \frac{\pi^2}{l^2} \quad (8)$$

Bij deze waarde van de kracht F is dus evenwicht in de uitgebogen stand mogelijk, we zullen deze waarde aanduiden als de knikkracht F_k .

De staaf lengte tussen de momentennulpunten A en B (een halve sinusgolf) zullen we aanduiden als de kniklengte l_k , zie fig. 3.

De waarde van de knikkracht bedraagt dan:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \quad (9)$$

De waarde van A blijft onbepaald; de grootte van de uitbuiging is dus onbeperkt.

Als de doorbuiging w immers $2 \times$ zo groot wordt, dan wordt ook de kromming $2 \times$ zo groot en hetzelfde geldt voor het buigend moment.

Bij een nauwkeuriger berekening blijkt dit niet helemaal juist te zijn; de uitbuiging neemt echter zeer snel toe bij langzaam toenemende kracht.

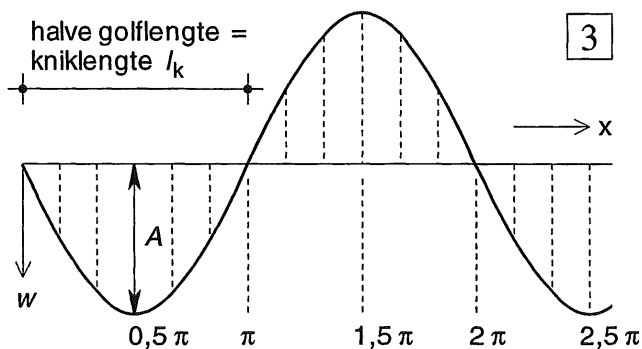


Fig. 3 Weergave van een sinusfunctie in de Analyse
 $w = A \sin x$ (x in radialen)

24.2.2 NADERE BESCHOUWING VAN HET KNIKVERSCHIJSSEL

In de voorgaande paragraaf is het knikverschijnsel voornamelijk beschouwd als een wiskundig vraagstuk. We zullen hier trachten om de verschijnselen wat meer plausibel te maken.

We beschouwen weer de staaf van fig. [584-1] waarbij de belasting nog niet de waarde van de knikkraft heeft bereikt, zodat de staaf nog volkomen recht is. We geven de staaf nu zelf een zijdelingse uitbuiging en fixeren hem in deze stand.

We hebben dan te maken met de volgende twee verschijnselen:

1. Door de kromming van de staaf ontstaan in elke doorsnede inwendige buigende momenten, die na loslaten, de staaf willen terugbrengen in zijn oorspronkelijke rechte stand.
2. Door de kromming van de staaf ontstaan in elke doorsnede echter ook uitwendige buigende momenten die worden veroorzaakt door de excentriciteit van de uitwendige drukkrachten ten opzichte van de staafas.

Als de onder 1. genoemde inwendige momenten *groter* zijn dan de onder 2. genoemde uitwendige momenten, dan zal de staaf – na het opheffen van de opgedwongen zijdelingse verplaatsing – zijn oorspronkelijke rechte stand hernemen.

Als de onder 1. genoemde momenten echter *kleiner* zijn dan de onder 2. genoemde momenten, dan zal de staaf steeds verder uitbuigen tot bezwijken optreedt.

Alleen als de genoemde momenten aan elkaar gelijk zijn, zal de staaf ook in de uitgebogen stand in evenwicht zijn.

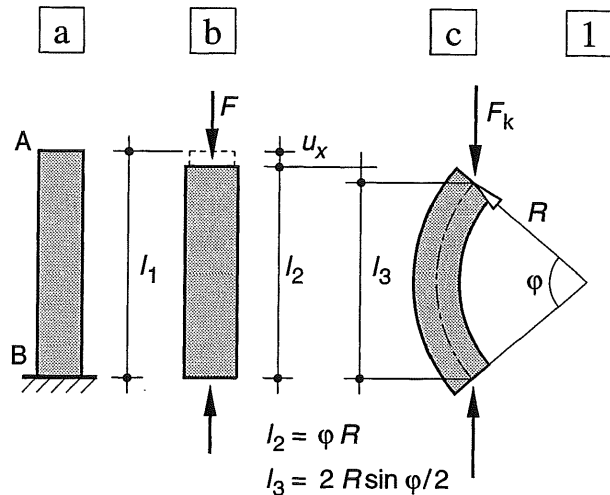


Fig. 1 Sterk overdreven vervormingen bij een drukstaaf

- a. Onbelaste toestand
- b. Verkorting van alle vezels door centrale druk
- c. Na buiging blijft de neutrale lijn even lang, de projectie op de verticaal neemt daardoor af (Formules voor cirkelvormige buiging)

In de opstelling van fig. 1 zal punt A onder invloed van de drukkracht F willen zakken, zoals is weergegeven in fig. 1b.

Maar zodra de kracht F zo groot wordt dat de staaf eigenlijk in elke uitgebogen stand in evenwicht is, kan de zakkings van punt A op een veel gemakkelijker manier plaats hebben, zie fig. 1c. Bij toenemende uitbuiging blijft de neutrale lijn immers even lang, terwijl de projectie van de neutrale lijn op de verticaal, bij toenemende kromming steeds verder afneemt, zodat punt A verder zakt.

24.2.3 ANDERE MOGELIJKHEDEN VOOR DE KNIKVORMEN

In [585] hebben we van vergelijking (7) alleen de eerste twee mogelijkheden onderzocht.

Alle mogelijkheden kunnen worden weergegeven door de uitdrukking:

$$a l = n \pi \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

De formule voor de knikkracht wordt dan:

$$F_k = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} \quad (10)$$

Voor de zijdelingse verplaatsingen vinden we:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l/n} \quad (11)$$

Voor $n = 2$ is de *kniklengte* dus gehalveerd. Tegelijkertijd is *knikkracht* met een factor 4 toegenomen.

Voor $n = 3$ wordt de lengte l in drieën gedeeld terwijl de knikkracht $9 \times$ zo groot is geworden. In fig. 2 is een en ander weergegeven.

Knik treedt op bij de laagst mogelijke kniklast. De bezwijkvormen van fig. 2b, c hebben dan ook alleen maar betekenis, als we zelf maatregelen nemen dat de momentennulpunten niet kunnen verplaatsen.

Als we er dus bij slanke staven voor zorgen, op regelmatige afstanden koppelingen aan te brengen die een zijdelingse verplaatsing verhinderen, kan de knikkracht sterk worden opgevoerd

Formule (10) kan dus net zo goed worden geschreven in vorm van formule [585-(9)]. We moeten echter geval voor geval nagaan, welke knikvormen mogelijk zijn en vervolgens welke van deze mogelijkheden de laagste kniklast oplevert.

24.2.4 KNIKFORMULE VAN EULER IN ALGEMENE VORM

In het voorgaande hebben we ons alleen bezig gehouden met een drukstaaf die aan de einden scharnierend is bevestigd. Er zijn echter ook allerlei andere randvoorwaarden voor staven mogelijk, die alle hun eigen knikvorm bezitten.

Aangezien zowel de sinusfunctie als de cosinusfunctie na twee maal differentiëren – op het teken na – weer hun oorspronkelijke vorm aannemen, kan de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (3b) worden geschreven als:

$$w = C_1 \sin a x + C_2 \cos a x \quad (12)$$

De juistheid hiervan is gemakkelijk te controleren door (12) twee maal te differentiëren en vervolgens te substitueren in [585-(3b)].

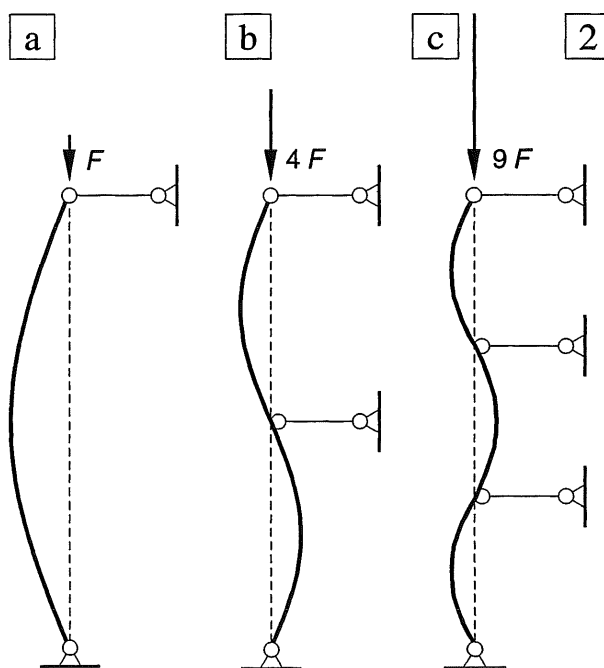


Fig. 2 Knikvormen met bijbehorende knikkrachten
a. $n = 1$; b. $n = 2$; c. $n = 3$

24.3.1 EENZIJDIG INGEKLEMDE STAAF

We zullen nog één voorbeeld bespreken waarbij gebruik wordt gemaakt van de oplossing van de differentiaalvergelijking. We beschouwen hier toe een kolom die aan de onderzijde volledig is ingeklemd en aan de bovenzijde wordt belast door een verticale puntlast, zie fig. 1a.

Uit het resultaat zal blijken dat we de oplossing van het vraagstuk in het vervolg op een veel eenvoudiger manier kunnen bepalen.

De meest waarschijnlijk uitbuigingslijn is weergegeven in fig. 1b. Als we de maximale uitbuiging aangeven met A , dan geldt voor het (negatieve) buigend moment, zie fig. 1c:

$$M_x = F * (w - A) \quad (13)$$

Substitutie van (13) in de differentiaalvergelijking [585-(3)] levert dan:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F * (w - A)}{EI} = 0 \quad (14)$$

Door substitutie kan worden nagegaan dat de volgende oplossing aan deze differentiaalvergelijking voldoet:

$$w = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + A \quad (15)$$

waarin: $a^2 = F/EI$

Er geldt immers:

$$\begin{aligned} dw/dx &= +a C_1 \cos ax - a C_2 \sin ax \\ d^2 w/dx^2 &= -a^2 C_1 \sin ax - a^2 C_2 \cos ax \end{aligned}$$

Substitutie in (14) levert dan:

$$\begin{aligned} -a^2 [C_1 \sin ax + C_2 \cos ax] + \\ + a^2 [C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + A - A] = 0 \end{aligned}$$

We kunnen nu de volgende drie randvoorwaarden opstellen:

Voor $x = 0$ geldt: $w = 0$ en $dw/dx = 0$.

Voor $x = l$ geldt: $w = A$

Uit de eerste twee voorwaarden volgt:

$$0 = C_2 + A$$

$$0 = a C_1$$

$$\begin{aligned} \text{Dit levert: } C_1 &= 0 \\ C_2 &= -A \end{aligned}$$

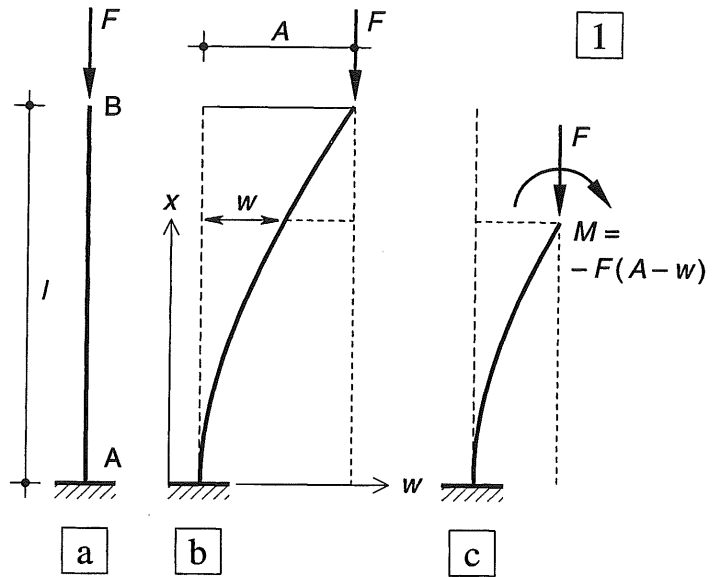


Fig. 1 Volledig ingeklemde staaf met een verticale puntlast in de top

- a. Schema
- b. Staaf in uitgebogen stand
- c. Moment in een snede

Substitutie van C_1 en C_2 in (15) levert:

$$w = A (1 - \cos ax) \quad (15a)$$

Als we vervolgens in formule (15a) de gegevens uit de derde randvoorwaarde invullen, dan vinden we:

$$A = A (1 - \cos al), \text{ ofwel}$$

$$A \cos al = 0 \quad (16)$$

Aan de vergelijking kan worden voldaan als geldt: $A = 0$; dan is er dus geen uitbuiging, of als geldt: $\cos al = 0$

De laagste reële waarde die aan de tweede vergelijking voldoet is:

$$al = \pi/2 \quad (17)$$

Uit formule (17) volgt als knikkracht:

$$a^2 = \frac{F_k}{EI} = \frac{\pi^2}{(2l)^2} \text{ zodat geldt:}$$

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad (18)$$

De kniklengte is kennelijk gelijk aan twee maal de lengte van de kolom en de knikkracht bedraagt dus $1/4$ van de waarde voor een scharnierend bevestigde staaf.

In fig. 2 is het spiegelbeeld van de ingeklemde staaf eveneens weergegeven. Dan is gemakkelijk zichtbaar dat de kniklengte (de afstand tussen de buigpunten van de kromme) gelijk is aan de dubbele staaf lengte ($l_k = 2l$), zodat de knikkracht F_k wordt verkleind met een factor $2^2 = 4$.

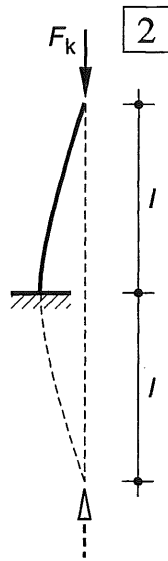
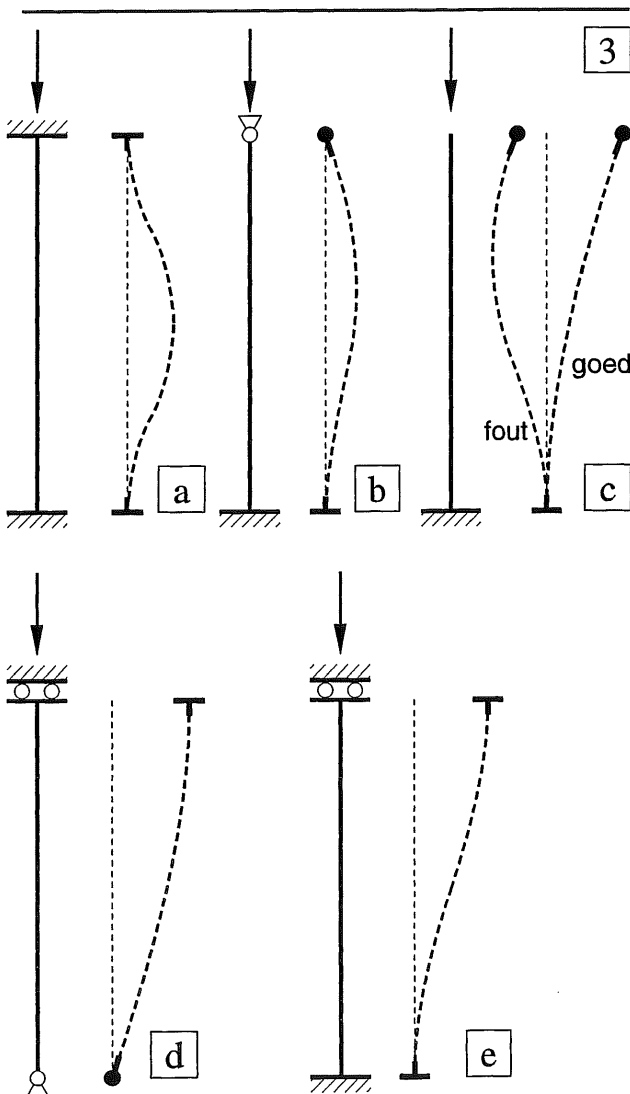


Fig. 2 Eenzijdig ingeklemde staaf met spiegelbeeld



24.3.2 SCHETSEN VAN KNIKLINIEN

Wat we kennelijk moeten doen is nagaan welke knikvorm mogelijk is, die bestaat uit een zo gering mogelijk aantal sinusgolven. Hierbij moeten we uiteraard rekening houden met de randvoorwaarden van de staaf.

Voorts zullen we altijd aannemen dat de staaf niet door de een of andere oorzaak wordt tegengehouden om in lengterichting te verkorten.

Verder weten we dat de randvoorwaarden de volgende mogelijkheden leveren:

1. Inklemming: geen verplaatsing
geen rotatie
2. Scharnier: geen verplaatsing
wel een rotatie
3. Vrij uiteinde: wel een verplaatsing
wel een rotatie

In fig. 3 zijn enkele combinaties van randvoorwaarden weergegeven. Om de knikvorm te vinden tekenen we eerst de staafuiteinden volgens bovenstaand schema, zie fig. 3a, b, c. Uitgaande van deze staaf-uiteinden wordt dan een continue sinuslijn geschetst met zo min mogelijk golven. Bij een inklemming en een scharnier kan er dan eigenlijk niet meer veel fout gaan. Bij een vrij verplaatsbaar uiteinde, zoals in fig. 3c is weergegeven, moeten we wat beter opletten. Een onjuiste aanname van de stand van dit uiteinde (links) levert dan ook een onjuiste uitkomst.

Bedenk dat wanneer een staafuiteinde kan verplaatsen, hij dat ook zeker zal doen, omdat dit altijd de laagste kniklast oplevert.

In [590] zullen we gevallen tegenkomen, waarbij een steunpunt wel zijdelings kan verplaatsen, maar niet kan verdraaien. Ook hier kunnen we weer op dezelfde wijze te werk gaan, zoals is weergegeven in fig. 3d, e.

Fig. 3 Knikvormen

- a. Inklemming boven en onder
- b. Scharnier boven en inklemming onder
- c. Boven een vrij uiteinde, onder een inklemming
links: onjuiste knikvorm, rechts: juiste knikvorm
- d. e. Zijdelings verplaatsbare inklemming boven
- d. Scharnier onder
- e. Inklemming onder

24.3.3 BASISBELASTINGGEVALLEN

Er zijn bij knikproblemen een aantal combinaties van randvoorwaarden die vrij vaak voorkomen. Van deze gevallen moet men de kniklijnen zonder meer kunnen schetsen en de bijbehorende knikkracht berekenen.

Ter wille van de duidelijkheid zijn de knikstaven weergegeven als onderdeel van een portaal, waarbij de bovenregel van het portaal oneindig stijf is aangenomen.

We kunnen twee groepen onderscheiden:

1. *Ongeschoord portaal* : de bovenregel van het portaal kan wél zijdelings verplaatsen.
2. *Geschoord portaal* : de bovenregel van het portaal kan niet zijdelings verplaatsen.

Groep 1 **ONGESCHOORDE PORTALEN**
één van de staafuiteinden kan zijdelings verplaatsen

Fig. 1 Bovenregel scharnierend opgelegd op twee ingeklemde stijlen

kniklengte $l_k = 2l$

knikkracht $F_k = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ (19a)

Fig. 2 Tweescharnierspant

kniklengte $l_k = 2l$

knikkracht $F_k = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ (19b)

Fig. 3 Volledig ingeklemd portaal

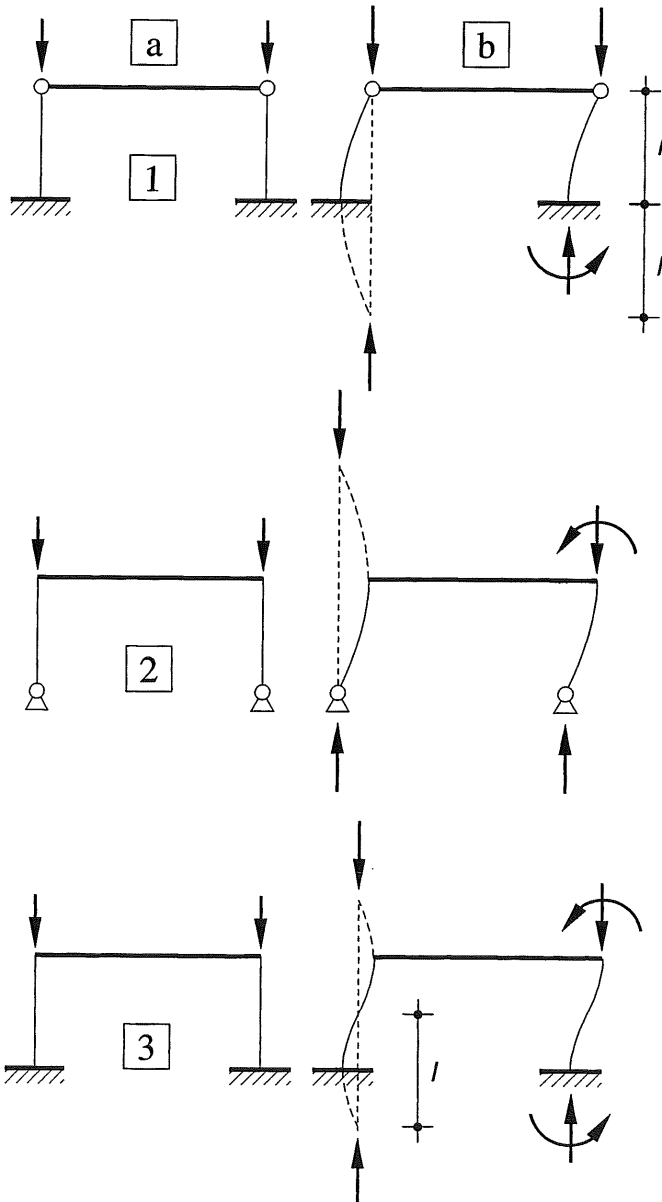
kniklengte $l_k = l$

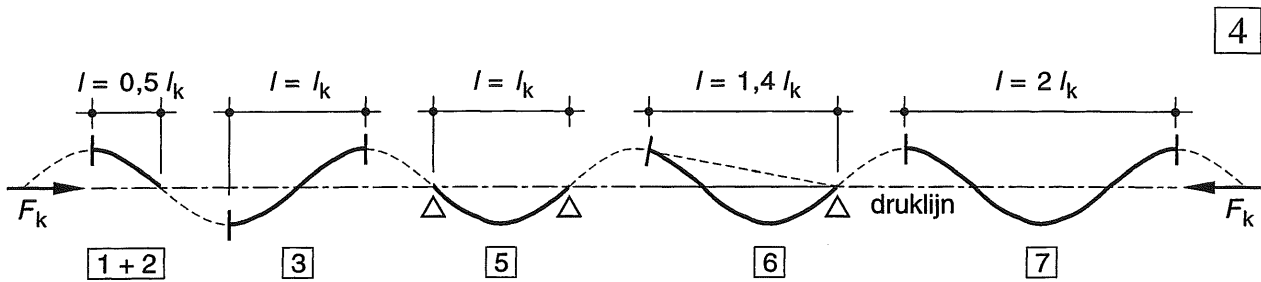
knikkracht $F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ (20a)

Bij het tekenen van de kniklijnen wordt de zijdelingse uitbuiging overdreven weergegeven. Zoals eerder vermeld, is het echter ongebruikelijk om de daarbijbehorende (veel kleinere) verkorting in de staafrichting ook weer te geven. Bij de getekende portalen wordt de bovenregel oneindig stijf verondersteld, zodat bij een zijdelingse verplaatsing geen rotatie kan optreden.

Het maakt voor het knikverschijnsel niet uit of de zijdelingse verplaatsing naar links of naar rechts plaats vindt. De verbindingslijn van de momentennulpunten vormt de druklijn. Een maximale afstand van de druklijn tot de staafas betekent dus dat daar het maximale moment optreedt. In de figuren 1b, 2b en 3b is bij de linkerstijlen de knikkracht ter plaatse van de druklijn aangegeven.

Bij de rechterstijlen zijn de knikkrachten – waar nodig – naar de stijlen verplaatst onder invoering van een buigend moment.





4

Voor het schetsen van de kniklijnen in de figuren 1, 2, 3 en 5, 6, 7 raadplege men zondig nogmaals 24.3.2 [589].

Fig. 4 Sinuslijn met de delen die zijn gebruikt voor de figuren 1, 2, 3 en 5, 6, 7

{ 8 } C. Hartsuijker 'Stabiliteit'

Alleen voor het belastinggeval van fig. 6 is het nodig om een wat ingewikkelder differentiaalvergelijking van de vierde orde op te lossen, zie { 8 }.

Alle andere gevallen volgen direct uit symmetrie- of keersymmetrie-overwegingen.

Groep 2 GESCHOORDE PORTALEN
de staafuiteinden kunnen niet zijdelings verplaatsen

Fig. 5 Bovenregel scharnierend opgelegd op twee pendelstijlen; zijdelings gesteund

kniklengte $l_k = l$

$$\text{knikkracht } F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (20b)$$

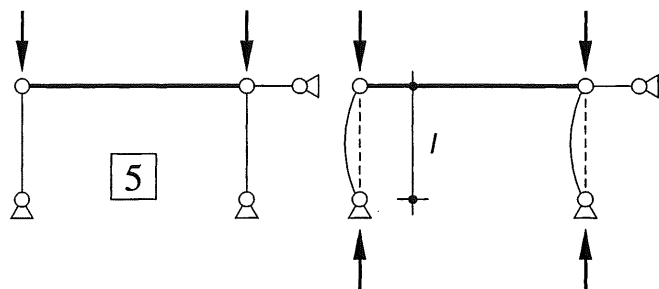


Fig. 6 Tweescharnierspant; zijdelings gesteund

kniklengte $l_k = 1/2 l \sqrt{2} \approx 0,7 l$

$$\text{knikkracht } F_k = \frac{2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (21)$$

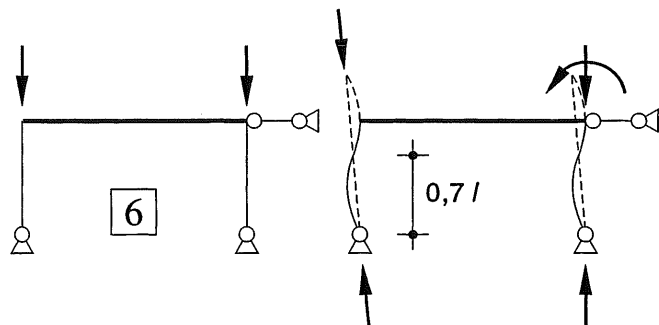
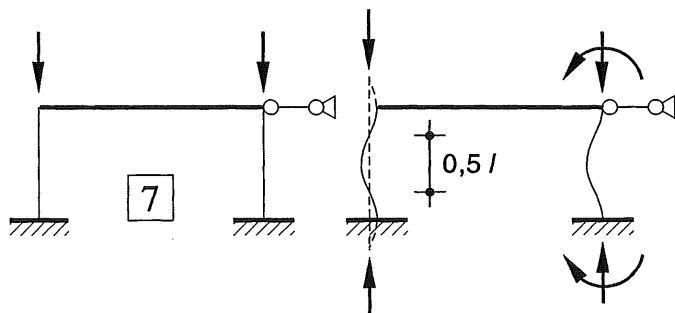


Fig. 7 Volledig ingeklemd portaal

kniklengte $l_k = 0,5 l$

$$\text{knikkracht } F_k = \frac{4 \pi^2 EI}{l^2} \quad (22)$$



24.4.1 ALGEMEEN

Bij de afleiding van de knikformule van Euler komt alleen de buigstijfheid EI maar aan de orde en wordt er absoluut niet gekeken naar de optredende normaalspanningen, die toch in eerste instantie maatgevend zullen zijn voor de benodigde doorsnede A van het profiel.

Het is gebruikelijk om de benodigde doorsnede (bijv. van een centrisch gedrukte betonkolom) in eerste instantie te baseren op de optredende drukkracht. Als dan blijkt dat bij de gekozen doorsnede de knikkracht F_k vele malen groter is dan de optredende drukkracht, behoeven we ons over knik geen zorgen te maken.

De berekening van de knikkracht wordt dan uitsluitend als controlemiddel gebruikt.

Bij zgn. *gedrongen staven* zijn enorme krachten nodig om de centrisch gedrukte staaf in de uitgebogen stand te doen overgaan. Het is dan zeer wel mogelijk dat de daarbij behorende normaalspanningen al veel en veel te hoog zijn om gewoon als centrische drukspanningen te kunnen worden overgedragen

Bij zgn. *slanke staven* (die dikwijls bij stalen vakwerken voorkomen), kan echter blijken dat de meest voor de hand liggende keuze van het profiel – uitsluitend gebaseerd op de normaalkracht – buigstijfheden oplevert die bezwijken op knik onafwendbaar maken. Hier kunnen we dus niet volstaan met een simpele controle, maar moeten we het knikverschijnsel rechtstreeks in de berekening betrekken.

In 24.4.2 zullen we de meest eenvoudige methode bespreken die kan worden gebruikt voor een globale dimensionering. De benodigde staafdoorsnede wordt dan in twee stappen bepaald. Eerst wordt de dwarsdoorsnede berekend die minimaal nodig is om de rekenwaarde van de normaalkracht ($N_d = F_d$) te kunnen overbrengen. Vervolgens wordt de knikkracht F_k bepaald die uit de I van de dwarsdoorsnede volgt. Ligt F_k voldoende ver boven F_d dan is de berekening hiermee voltooid.

Is dit niet het geval, dan wordt een gewenste knikkracht $F_k = n \cdot F_d$ gekozen en wordt de daarvoor benodigde I berekend. Alle vereenvoudigingen en onzekerheden worden dan verdisconteerd in de numerieke waarde van n .

24.4.2 GLOBALE DIMENSIONERING

Beton

Er wordt uitgegaan van een centrisch gedrukte betonkolom met een hoogte $h = 3,50$ m, volgens fig. 1a1,2 [590-1b]. De kniklengte bedraagt dan: $l_k = 2h = 7,0$ m

Beton B 25, druksterkte $f'_b = 15$ N/mm².

Rekenwaarde van de belasting $F_d = 600$ kN.

De normaalspanning volgt uit $\sigma = F_d / A$, dus de benodigde dwarsdoorsnede A volgt uit:

$$A = \frac{F_d}{f'_b} = \frac{600 \cdot 10^3}{15} = 4 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

Er wordt een vierkante kolomdoorsnede toegepast zodat $A = h \times h$. De afmeting h bedraagt $h = \sqrt{(4 \cdot 10^4)} = 200$ mm (minimum maat). $I = 1/12 \cdot h^4 = 1/12 \cdot 200^4 = 133,3 \cdot 10^6$ mm⁴

De knikkracht is dan gelijk aan:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{\pi^2 20000 \cdot 133,3 \cdot 10^6}{49 \cdot 10^6} = 537 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \dots (a)$$

De knikkracht is met 537 kN dus kleiner dan de aangenomen kracht van 600 kN in het bezwijkstadium, zodat de kolom zeker zal uitknikken.

Om redelijk zeker te zijn dat geen knik zal optreden kan men voor beton uitgaan van een factor $n = F_k / F_d \geq 5$, zodat geldt:

$$F_k = 5 \cdot 600 = 3000 \text{ kN}$$

Het kwadratisch oppervlaktemoment I van de kolom met $A = 200 \times 200$ mm² moet dan worden vergroot in de verhouding:

$$3000 / 537 = 5,58$$

Stellen we de benodigde afmeting van de kolom gelijk aan h_1 dan moet gelden:

$$1/12 \cdot (h_1)^4 = 5,58 \cdot 1/12 \cdot h^4$$

Hieruit volgt:

$$h_1 = h \sqrt[4]{5,58} = 1,537 h = 1,537 \cdot 200 = 307,4 \text{ mm}$$

Gezien de grove aanname voor n kan zonder meer worden uitgegaan van $h_1 = 300$ mm.

De doorsnede wordt dan: $A = 300 \times 300$ mm²

De drukspanning loopt daardoor terug tot:

$$\sigma = F_d / A = 600 \text{ 000} / 90 \text{ 000} = 6,67 \text{ N/mm}^2$$

en de knikkracht loopt op tot $F_k = 2719$ kN.

Staal

Er wordt uitgegaan van een centrisch gedrukte stalen kolom met een hoogte $h = 3,50$ m volgens fig. 1a3. De kniklengte in z -richting bedraagt:

$$l_{kz} = 2h = 7,0 \text{ m, en in } y\text{-richting :}$$

$$l_{ky} = 0,7 h = 0,7 * 3,50 = 2,45 \text{ m.}$$

Vloegrens $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$, $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

Rekenwaarde van de belasting $F_d = 600 \text{ kN}$.

De normaalspanning volgt uit $\sigma = F_d / A$, dus

$$A = \frac{F_d}{f_y} = \frac{600 * 10^3}{235} = 2553 \text{ mm}^2$$

Een profiel HE-B 100 blijkt dan voldoende te zijn; fig. 1c1. Uit een tabellenboek volgt:

$$A = 2600 \text{ mm}^2, \quad I_y = 450 * 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 167 * 10^4 \text{ mm}^4.$$

De knikkrachten in z - en y -richting bedragen:

$$F_{kz} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_{kz}^2} = \frac{\pi^2 EI_y}{4h^2} = 190 \text{ kN}$$

$$F_{ky} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_{ky}^2} = \frac{2 \pi^2 EI_z}{h^2} = 564 \text{ kN}$$

zodat geldt: $F_{ky} / F_{kz} = 8 I_z / I_y$

De knikkracht $F_{kz} = 190 \text{ kN}$ blijkt aanmerkelijk kleiner te zijn dan de waarde $F_d = 600 \text{ kN}$, terwijl ook de waarde $F_{ky} = 564 \text{ kN}$ te klein is.

Om aan de veilige kant te blijven kan men voor staal uitgaan van de factor:

$$n = F_k / F_d \geq 1,7$$

De knikkracht moet dan gelijk zijn aan:

$$F_k = 1,7 * 600 = 1020 \text{ kN}$$

We behoeven ons alleen te baseren op de z -richting, dus op het kwadratisch oppervlaktemoment I_y van de kolom; dit moet gelijk zijn aan:

$$I = \frac{l_k^2}{\pi^2 E} 1020 * 10^3 = \frac{49 * 10^6 * 1020 * 10^3}{9,87 * 210\,000} =$$

$$= 2411 * 10^4 \text{ mm}^4$$

We kunnen dan gebruik maken van profiel HE-B 160 met een gewicht van $42,6 \text{ kg/m}$; $A = 5430 \text{ mm}^2$, $I_y = 2492 * 10^4 \text{ mm}^4$, (fig. 1c2) $I_z = 889 * 10^4 \text{ mm}^4$

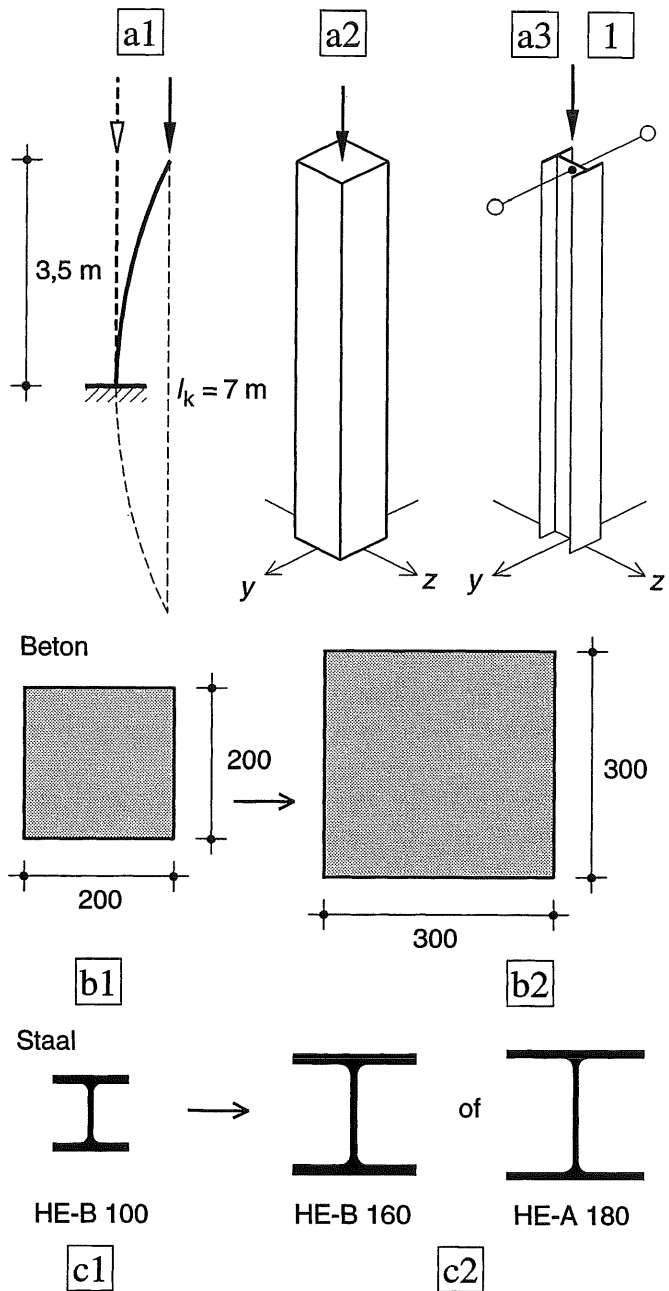


Fig. 1 Globale dimensionering op knik van een centrisch gedrukte betonnen en stalen kolom
 a1 Schema voor:
 a2 Betonkolom in y - en z -richting
 a3 Stalen kolom alleen in z -richting
 b1, c1 Eerste keuze van de dwarsdoorsnede op druk,
 b2, c2 en herziene keuze op knik

We komen wat lichter uit met profiel HE-A 180 met een gewicht van $35,5 \text{ kg/m}$ en $A = 4530 \text{ mm}^2$, $I_y = 2510 * 10^4 \text{ mm}^4$, $I_z = 925 * 10^4 \text{ mm}^4$.

24.4.3 KNIK IN ONDERLING
LOODRECHTE RICHTINGEN

Bij alle afleidingen tot [592-(22)] hebben we uitsluitend de vervormingen in het vlak van tekening beschouwd. Een prismatische staaf heeft echter een maximum en een minimum kwadratisch oppervlaktemoment. Indien de randvoorwaarden voor beide buigingsrichtingen dezelfde zijn, dan zal het profiel onherroepelijk uitknikken in de zwakste richting met de minimum I . Dikwijls blijkt het mogelijk om in de zwakke richting de randvoorwaarden zodanig aan te passen, dat knik in die richting niet maatgevend wordt, zoals in het voorbeeld van [593]

Voor alle gebruikelijke staalprofielen zijn de benodigde doorsnede-grootheden A en I te ontlelen aan tabellen.

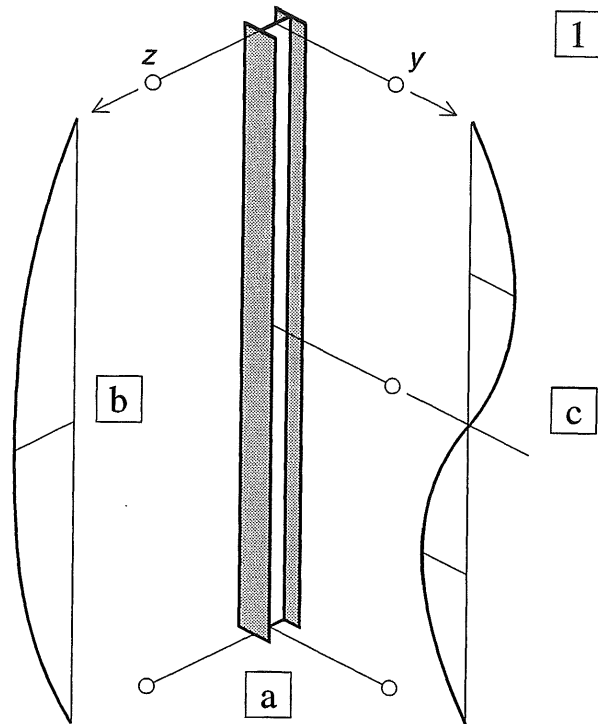


Fig. 1 Berekening van de knikkraft van een staaf
a. Schema
b. Knikvorm in z-richting
c. Knikvorm in y-richting

In fig. 1 a is nogmaals een staaf in een ruimtelijke situatie weergegeven waarbij in y - en z -richting afwijkende randvoorwaarden optreden terwijl ook de grootheden I_y en I_z verschillend zijn. Aangezien de y - en z -as voor het beschouwde profiel symmetrie-assen zijn, treden de extreme waarden van I ook in deze richtingen op. Voor beide richtingen wordt gecontroleerd wat de minimale knikkraft is en de kleinste van de twee is dan maatgevend.

Maar als de randvoorwaarden in beide richtingen gelijk zijn, dan kan het zinvol zijn om een doorsnedevorm te kiezen die in elke richting hetzelfde kwadratische oppervlaktemoment bezit. Als geldt dat $I_y = I_z$ en de doorsnede bezit twee of meer symmetrie-assen, dan is dit altijd het geval, zie fig. 2a, b2.

Bezit de doorsnedevorm maar één symmetrie-as, zoals bij een gelijkzijdig hoekstaal, dan treden langs de symmetrie-as en de as loodrecht daarop de extreme waarden van I op, die vrij sterk afwijken van de waarden $I_y = I_z$; fig. 2b (1). Voor doorsnedevormen zonder symmetrie-as, zoals een ongelijkzijdig L-profiel of een Z-profiel moeten ook de richtingen van de hoofdasen worden berekend, c.q. worden ontnomen aan tabellen, fig. 2b (0). In KW-4 [440-442] is een en ander nader uitgewerkt voor een Z-profiel.

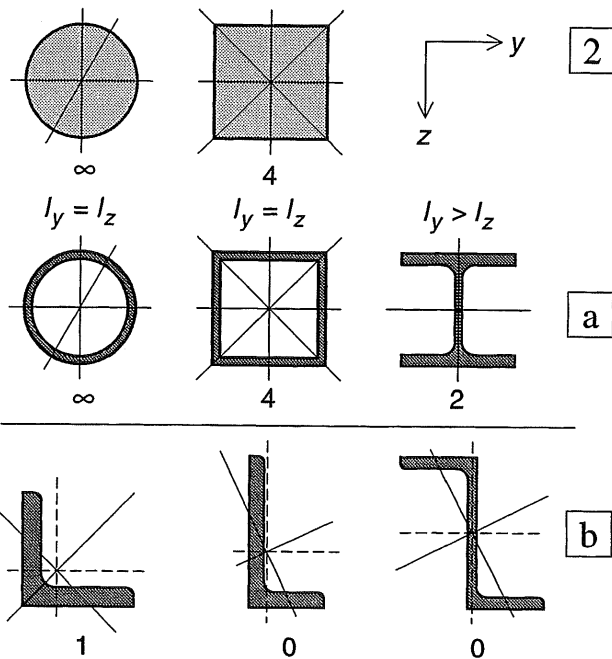


Fig. 2 Doorsnedevormen met symmetrie-assen
a. Twee of meer symmetrie-assen (∞ - 4 - 2)
b. Eén symmetrie-as (1) of geen symmetrie-as (0)

24.4.4 BEREKENING VAN DE KNIKSPANNING

We beschouwen het geval dat de knikkracht is bereikt en de staaf nog juist niet is uitgeknikt. De grootte van de normaalspanning (knikspanning) is dan gelijk aan:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A l_k^2} \quad (21)$$

Om formule (21) te vereenvoudigen wordt eerst de grootte i ingevoerd – met de oude benaming 'traagheidsstraal' – en de nieuwe benaming: 'oppervlakte-moment-arm'. De afstand i volgt uit de onderstaande definitie:

$$I = A * i^2 \quad (22)$$

Voor het bepalen van het kwadratisch oppervlaktemoment denken we ons het gehele oppervlak in één punt geconcentreerd op een afstand i vanaf de betreffende neutrale lijn, waarna toepassing van de regel van Steiner het bovenstaande resultaat geeft (KW-4 [430]).

Voorts wordt het dimensieloze begrip slankheid λ (= lambda) ingevoerd volgens:

$$\lambda = \frac{l_k}{i} \quad (23)$$

Bij toenemende slankheid treedt eerder knik op; een toenemende kniklengte en een afnemende stijfheid zorgen daar immers voor.

Achtereenvolgende substitutie van (22) en (23) in (21) levert:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E i^2}{l_k^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (24)$$

De hierboven gegeven werkwijze wordt voornamelijk voor staal toegepast.

Als we dan als voorwaarde invoeren dat σ_k de evenredigheidsgrens of de vloeispanning of een bepaald percentage daarvan niet mag overschrijden, dan is een numerieke grenswaarde voor λ voorhanden. Voor grotere slankheden geldt de formule van Euler wèl, voor kleinere niet.

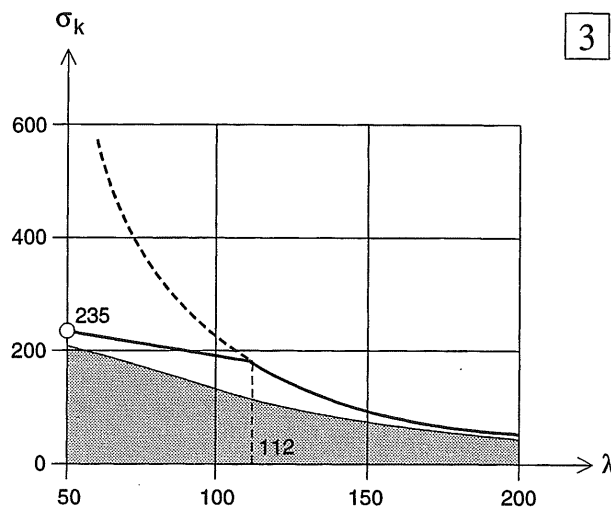


Fig. 3 Knikspanning als functie van de slankheid λ
Gerasterd gebied: toelaatbaar volgens voorschriften

Om deze grenswaarde voor staal te bepalen, moeten we in vergelijking (24) substitueren: $\pi = 3,1416$; $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_k = 0,7 \sigma_u = 0,7 * 235 \text{ N/mm}^2$; de factor 0,7 is ingevoerd om rekening te houden met restspanningen in het staal. Substitutie levert:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = 3,1416 \sqrt{\frac{210\,000}{0,7 * 235}} = 112$$

In fig. 3 is de knikspanning volgens formule (24) weergegeven voor staal als functie van λ .

$$\sigma_k = \frac{3,1416^2 * 210\,000}{\lambda^2} = \frac{2,07 * 10^6}{\lambda^2} \text{ N/mm}^2 \quad \dots (24a)$$

Voor waarden van λ kleiner dan 112, is de kromme met een hellende lijn afgeknot.

Als vuistregel voor het normale profielstaal (FeE 235) kan men dus aanhouden:

$\lambda > 112$ elastische knik; $\lambda < 112$ vloeien
Bij toenemende λ zullen in het bezwijkstadium aanmerkelijk lagere spanningen optreden dan de vloeispanning.

In de voorschriften wordt echter nog veel gedetailleerder rekening gehouden met reeds aanwezige spanningen in het profiel ten gevolge van diverse invloeden. Daardoor wordt maar een variërend percentage toegelaten van de waarden volgens fig. 3 voor slankheden $\lambda > 112$. Voor kleinere slankheden verloopt de lijn geleidelijk naar de vloeispanning, zie het gerasterde veilige gebied van fig. 3. Uitvoering informatie in DRAAGCONSTRUCTIES II.

24.5.1 ALGEMEEN

In het voorgaande hebben we ons alleen bezig gehouden met lijnvormige constructie-delen die exact centrish worden gedrukt, en dus volkomen recht blijven. Pas bij het bereiken van de knikkracht treedt plotseling een grote uitbuiging op, zie fig. 1a. Maar in het algemeen zullen door constructie-elementen niet alleen centrische normaalkrachten worden overgedragen, maar ook buigende momenten. Dit houdt in, dat ver beneden de knikkracht van het element, de uitwendige drukkrachten toch al een bijdrage zullen leveren aan het buigende moment; fig. 1b. De vraag is nu, in hoeverre de knikkracht van het element door deze reeds aanwezige uitbuiging wordt beïnvloed.

In diverse handboeken zijn dergelijke berekeningen uitgevoerd voor een aantal betrekkelijk eenvoudige belastinggevallen.

Voor de hand liggend is de aanname van een constante excentriciteit ter plaatse van de aangrijpingspunten van de drukkrachten, zoals is weergegeven in fig. 2a.

Het buigende moment $M = F * e$ is dan in eerste instantie recht evenredig met de kracht F .

Een constante gelijkmatig verdeelde belasting volgens fig. 2b levert een parabolisch verlopend buigend moment dat in eerste instantie onafhankelijk is van F .

In beide gevallen levert de uitbuiging van het element weer een extra bijdrage aan het buigend moment.

De uitvoering van de berekeningen wordt echter sterk vereenvoudigd als we uitgaan van een belasting die *sinusvormig* verloopt, zoals is aangegeven in fig. 2c [597-598].

Bovendien blijkt na vergelijking met de andere berekeningsresultaten, dat de laatstgenoemde berekeningswijze een algemene geldigheid bezit, die eveneens van toepassing is op de eerder genoemde belastinggevallen.

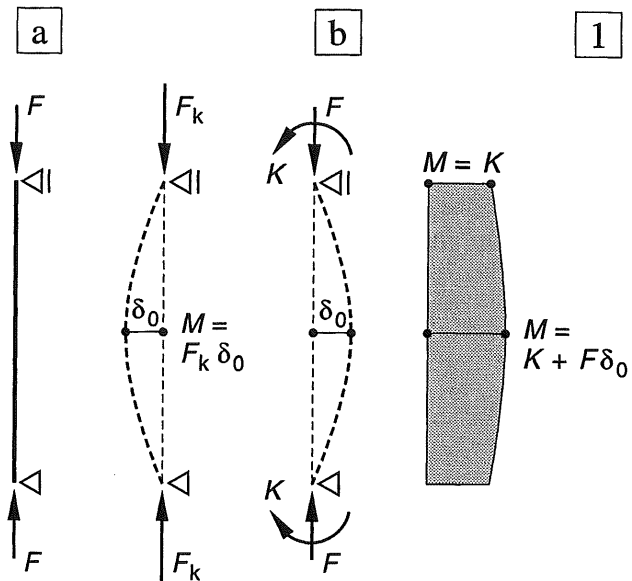


Fig. 1 Invloed van een moment op de knikkracht

- Een centrische drukkracht – kleiner dan de knikkracht – levert geen aandeel aan het buigend moment
- Door de uitbuiging van de ligger, levert een normaalkracht – kleiner dan de knikkracht – wél een aandeel aan het buigend moment

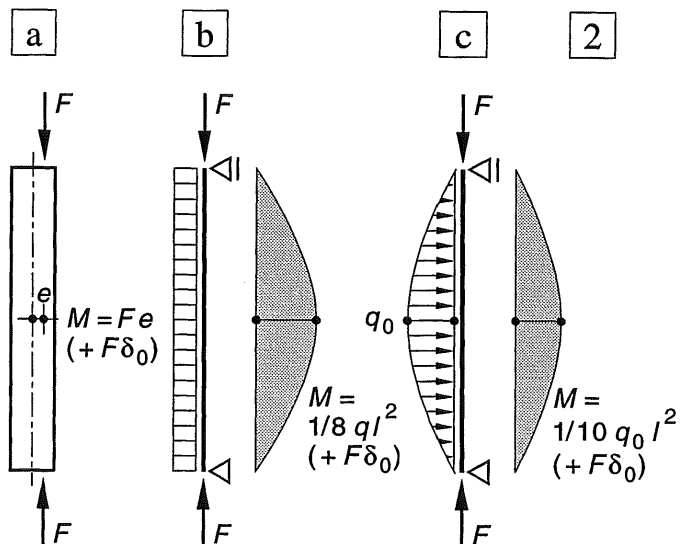


Fig. 2 Enkele standaardgevallen voor normaalkracht plus buiging met het daarbij in eerste instantie optredende buigende moment

- Excentrische drukkrachten
- Gelijkmatig verdeelde belasting
- Sinusvormig verlopende belasting [597]

24.5.2 SINUSVORMIG VERLOPENDE BELASTING OP EEN LIGGER

Om de afleiding zo eenvoudig mogelijk te houden, zullen we beginnen met een vrij opgelegde ligger, die is onderworpen aan een sinusvormig verloopende gelijkmatig verdeelde belasting.

$$q_x = q_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (25)$$

Deze belasting zal dan ook een sinusvormig doorbuigingsverloop veroorzaken; fig. 3a, b.

$$w = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (26a)$$

Dit is gemakkelijk in te zien door vergelijking met de formules [506-(7)]; als de doorbuiging w is gegeven, dan volgt na vier maal differentiëren:

$$d^4 w / dx^4 = + q_x / EI \quad (27)$$

Bij een sinusvormig verloop van w , vinden we na vier maal differentiëren weer een sinusvorm; met andere woorden: de belasting q_x zal eveneens sinusvormig moeten verlopen.

De relatie tussen de grootte van de belasting en de grootte van de doorbuiging kunnen we als volgt bepalen. We gaan uit van een sinusvormig doorbuigingsverloop met een maximale doorbuiging δ_0 volgens formule (26a). Achtereenvolgende differentiatie levert dan de vierde afgeleide, zie formule (26e) hiernaast. Substitutie in (27) levert dan de gezochte betrekking (28) die voor $x = l/2$ overgaat in:

$$q_0 = \frac{\pi^4}{l^4} EI \delta_0 \quad (28a)$$

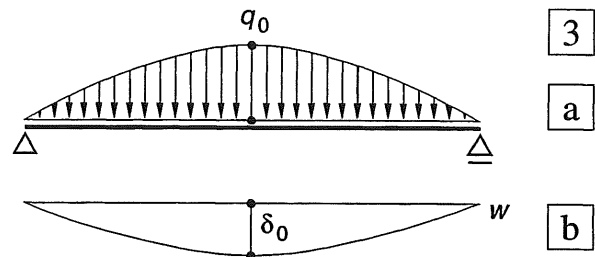


Fig. 3 Vrij opgelegde ligger: een sinusvormige belasting levert een sinusvormige doorbuiging
a. Schema
b. Doorbuiging

Differentiatie van w

$$w = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (26a)$$

$$\frac{dw}{dx} = + \frac{\pi}{l} \delta_0 \cos \frac{\pi x}{l} \quad (26b)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{\pi^2}{l^2} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (26c)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = - \frac{\pi^3}{l^3} \delta_0 \cos \frac{\pi x}{l} \quad (26d)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = + \frac{\pi^4}{l^4} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (26e)$$

Substitutie van (26e) in (27) levert:

$$q_x = \frac{\pi^4}{l^4} EI \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (28)$$

Vergelijken we formule (28) met formule (25), dan volgt formule (28a), die links hiernaast is weergegeven.

Buigend moment

Om het buigend moment in de belasting uit te drukken, zullen we gebruik maken van (de herschreven) formule [506-(7c)]:

$$M_x = -EI d^2 w / dx^2 \quad (29)$$

De grootte EI volgt uit formule (28a) en de grootte $d^2 w / dx^2$ volgt uit formule (26c).

Substitutie van de genoemde waarden in formule (29) levert:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{q_0}{\delta_0} \frac{l^4}{\pi^4} * \frac{\pi^2}{l^2} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} = \\ &= q_0 \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \quad (30)$$

24.5.3 SINUSVORMIGE BELASTING PLUS CENTRISCHE DRUK

Door het toevoegen van de uitwendige drukkrachten F in A en B, zal in de ligger een extra moment ontstaan dat ook sinusvormig verloopt, zie fig. 1b. De doorbuiging blijft dus sinusvormig, maar de maximale doorbuiging neemt hierdoor toe van δ_0 tot δ_1 , zie fig. 1c.

Het extra moment uitsluitend ten gevolge van de drukkrachten F bedraagt ten:

$$M_x = F \delta_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (31)$$

De kromming van de ligger door de invloeden van q_0 en F tezamen, volgt dan weer uit formule [597-(26c)] als we δ_0 vervangen door δ_1 :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \delta_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (32)$$

We hebben nu alle benodigde gegevens verzameld om formule [597-(29)] toe te passen voor het geval dat zowel q_0 als F op de ligger werken. Het moment M_x is dan gelijk aan de som van de momenten volgens de formules (30) en (31), de kromming volgt uit formule (32). Substitutie van deze formules in 'basisformule' (29) levert dan:

$$\begin{aligned} q_0 \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} + F \delta_1 \sin \frac{\pi x}{l} &= \\ &= +EI \frac{\pi^2}{l^2} \delta_1 \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \quad (33a)$$

In formule (33a) kunnen we allereerst alle termen delen door $\sin \pi x / l$. Daarna substitueren we q_0 volgens formule [597-(28a)].

Formule (33a) gaat dan over in:

$$\frac{\pi^2}{l^2} EI \delta_0 + F \delta_1 = \frac{\pi^2}{l^2} EI \delta_1 \quad (33b)$$

$$\text{Zoals bekend geldt: } \pi^2 EI / l^2 = F_k \quad (9)$$

$$\text{We stellen voorts } F_k / F = n \quad (34)$$

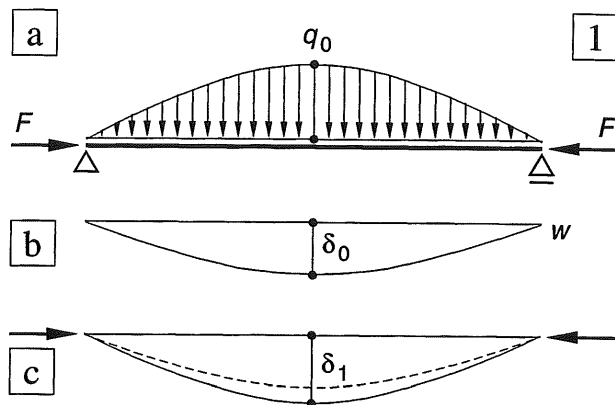


Fig. 1 Belasting ($q_0 + F$) op de ligger

- Belastingsschema
- Vervormingen alleen door q_0
- Vervormingen door ($q_0 + F$)

We kunnen nu de formules (9) en (34) in vergelijking (33b) substitueren.

We vinden dan:

$$F_k \delta_0 + \frac{F_k}{n} \delta_1 = F_k \delta_1 \quad (33c)$$

Uitdrukking (33c) tenslotte kunnen we herschrijven als

$$\delta_1 = \frac{n}{n-1} \delta_0 \quad (35)$$

Op deze wijze hebben we een vergrotingsfactor gevonden voor de uitbuiging ten gevolge van de drukkrachten F . Dit houdt in dat ook de buigende momenten door de q -last in deze verhouding worden vergroot.

Het (hyperbolische) verloop van de vergrotingsfactor $n / (n-1)$ als functie van n is weergegeven in fig. [A500-1] van de Appendix. Als de drukkracht F de waarde van de knikkracht F_k nadert, dan nadert de uitbuiging tot oneindig.

De ligger kan dus dezelfde knikkracht overbrengen als bij centrische druk, maar we worden nu gewaarschuwd voor het knikgevaar door de sterk toenemende uitbuiging en het oplopen van de buigspanningen

Ook voor de belastingen volgens fig. [596-2a, b] blijkt de doorbuiging tot oneindig te naderen als $F \rightarrow F_k$.

24.5.4 GLOBALE DIMENSIONERING OP MOMENT + NORMAALKRACHT

Beton

We hanteren een uiterst eenvoudige spanningsberekening waarbij het beton wordt geacht zowel druk- als trekspanningen te kunnen opnemen. In werkelijkheid wordt wapening aangebracht om de trekspanningen na scheurvorming te kunnen overnemen. De spanningscontrole volgt dan alleen voor de drukspanningen.

We beschouwen de doorsnede van fig. [593-b2] en gaan na welk buigend moment maximaal kan worden opgenomen. Uit $\sigma = M/W$ volgt:

$$M = W * \sigma = \frac{1}{6} h^3 \sigma = \frac{1}{6} 300^3 * 15 = 67,5 * 10^6 \text{ Nmm}$$

Bij een moment van 67,5 kNm wordt de druksterkte in de uiterste vezel bereikt en kan geen normaalkracht meer worden toegevoegd. We controleren daarom of de eerstvolgende vierkante doorsnede (afmetingen opklimmend met veelvouden van 50 mm) wèl in staat is om zowel een buigend moment van 65 kNm als een normaalkracht van 600 kN over te brengen. De spanningscontrole: $\sigma = -F/A \pm M/W$ levert:

$$\sigma = -\frac{600 * 10^3}{350^2} \pm \frac{65 * 10^6 * 6}{350^3} = -4,90 \pm 9,10$$

De maximale drukspanning van 14,0 N/mm² is nu kleiner dan de druksterkte van 15,0 N/mm², zodat de spanningen aan de eisen voldoen.

De knikkracht van de kolom volgt uit:

$$F_k = \frac{\pi^2 20000 \frac{1}{12} 350^4}{49 * 10^6} = 5038 * 10^3 \text{ N} = 5038 \text{ kN}$$

De vergrotingsfactor n bedraagt dan:

$$n = 5038 / 600 = 8,40. \text{ Dit is ruim voldoende.}$$

Er moet echter worden gerekend op een vergroting van de uitbuiging, dus ook van het maximale buigend moment met een factor:

$$n / (n - 1) = 8,40 / 7,40 = 1,135$$

De buigspanningen worden dus ook vergroot met 1,135. De maximale drukspanning wordt dan: $\sigma = -4,90 - 1,135 * 9,10 = -4,90 - 10,33 = -15,23 \text{ N/mm}^2$. Zo'n kleine overschrijding van de druksterkte is volledig acceptabel.

Staal

Voor staal zullen we weer uitgaan van de gegevens op blad [593] en een analoge berekening maken als voor beton. Het maximale buigend moment voor profiel HE-B 160 bedraagt:

$$M = W * \sigma = 311 * 10^3 * 235 = 73,1 * 10^6 = 73,1 \text{ kNm.}$$

We kiezen nu het eerstvolgende grotere profiel HE-B 180 en gaan na of dit profiel zowel een drukkracht $F = 600 \text{ kN}$ kan overbrengen als een buigend moment $M = 70 \text{ kNm}$. De spanningscontrole: $\sigma = F/A \pm M/W$ levert op druk:

$$\sigma = \frac{-600 * 10^3}{6530} - \frac{70 * 10^6}{426 * 10^3} = -91,9 - 164,3 = -256 \text{ N/mm}^2$$

De drukspanning $\sigma = 256 \text{ N/mm}^2$ is duidelijk te hoog. We proberen daarom profiel HE-B 200. Hier levert de spanningscontrole op druk:

$$\sigma = \frac{-600 * 10^3}{7810} - \frac{70 * 10^6}{570 * 10^3} = -76,8 - 122,8 = -199,6 \text{ N/mm}^2$$

Een drukspanning $\sigma \approx 200 \text{ N/mm}^2$ is duidelijk lager dan de druksterkte van 235 N/mm².

We kunnen nu de knikkracht controleren:

$$F_k = \frac{\pi^2 2,1 * 10^5 * 5696 * 10^4}{49 * 10^6} = 2409 * 10^3 \text{ N}$$

De vergrotingsfactor n bedraagt dan:

$$n = 2409 / 600 = 4,01. \text{ Dit is voor staal ruim voldoende. Er moet weer worden gerekend op een vergroting van de uitbuiging, dus ook van het maximale buigend moment met een factor: } n / (n - 1) = 4 / 3 = 1,33.$$

De buigspanningen worden dus ook vergroot met deze factor 1,33. De maximale drukspanning wordt dan: $\sigma = -76,8 - 1,33 * 122,8 = -76,8 - 163,3 = -240,1 \text{ N/mm}^2$.

Zo'n kleine overschrijding van de druksterkte is volledig acceptabel.

24.6.1 SINUSVORMIGE GELIJKMATIG
VERDEELDE BELASTING

We zullen het geval van een sinusvormige belasting op een vrij opgelegde ligger nog wat verder uitwerken. De totale belasting Q op de ligger volgt dan uit [597-(25)] en is gelijk aan:

$$Q = \int_0^l q_x dx = \int_0^l q_0 \sin \frac{\pi x}{l} dx =$$

$$= -\frac{l}{\pi} q_0 \left[\cos \frac{\pi x}{l} \right]_0^l = -\frac{l}{\pi} q_0 (-1 - 1) =$$

$$= +\frac{2l}{\pi} q_0 = 0,637 q_0 l \quad (36)$$

Het maximale moment volgt uit [(597-(30))]:

$$M_{\max} = q_0 \frac{l^2}{\pi^2} = 0,101 q_0 l^2 \quad (37)$$

We kunnen M_{\max} ook in de totale belasting Q uitdrukken door (36) in (37) te substitueren.

We vinden dan:

$$M_{\max} = Q \frac{l}{2\pi} = 0,159 Q l \quad (37a)$$

Het verloop van het buigend moment kan ook rechtstreeks in de maximale uitbuiging δ_0 worden uitgedrukt door vergelijking [597-(28a)] te substitueren in [597-(30)]:

$$M_x = \frac{\pi^4}{l^4} EI \delta_0 * \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} =$$

$$= \frac{\pi^2 EI}{l^2} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (38)$$

Uit (38) volgt het maximale moment voor $x = l/2$

$$M_{\max} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \delta_0 = F_k \delta_0 \quad (39)$$

Voor een sinusvormige belasting geldt dus exact dat de knikkracht kan worden bepaald door het maximale moment in de ligger te delen door de maximale uitbuiging van de ligger, onafhankelijk van de gekozen grootte van de belasting.

$$F_k = \frac{M_{\max}}{\delta_0} \quad (39a)$$

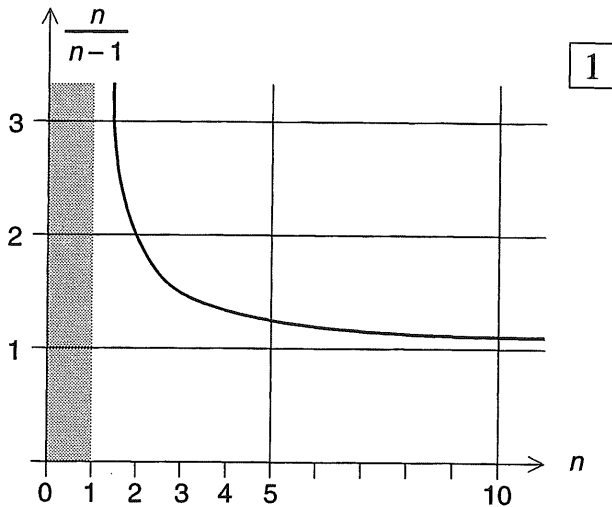


Fig. 1 Verloop van de vergrotingsfactor $n/n-1$ als functie van $n = F_k/F$

We zullen als eerste controleren of deze regel ook opgaat voor een gelijkmatig verdeelde belasting op een vrij opgelegde ligger.

Zoals bekend geldt [512; basisligger A1]:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q l^2 \quad \delta_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}$$

Substitutie van deze waarden in formule (39a) levert dan:

$$F_k = \frac{M_{\max}}{\delta_0} = \frac{384}{5} \frac{q l^2}{8} \frac{EI}{q l^4} =$$

$$\frac{48}{5} \frac{EI}{l^2} = 9,60 \frac{EI}{l^2} \quad (39b)$$

Bedenken we dat $\pi^2 = 9,87$, dan is het verschil met de exacte knikkracht minder dan 3%.

Aangezien de benaderingsformule een iets te lage waarde voor F_k levert, blijven we aan de veilige kant. De kniklengte l_k is dus iets te hoog aangenomen. Deze lengte volgt uit:

$$\frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{9,60 EI}{l^2} \quad \text{ofwel} \quad 9,60 l_k^2 = \pi^2 l^2$$

$$l_k = \frac{\pi l}{\sqrt{9,60}} = 0,986 l$$

24.7.1 VEREND INGEKLEMDE STAAF

Vooral bij ongeschoorde portalen kunnen grote kniklengten optreden, zoals blijkt uit de figuren [590-1, 2], waar bij een éézijdige volledige inklemming al kniklengten voorkomen ter grootte van $2 \times$ de lengte van de stijl ($l_k = 2l$). Maar als de volledige inklemming in de ondergrond [590-1] of in de bovenregel [590-2] in werkelijkheid een verende inklemming blijkt te zijn, dan zullen kniklengten optreden waarvoor geldt: $l_k > 2l$. Het schatten van een dergelijke kniklengte is een onzekere zaak; we zullen daarom gebruik maken van een analytische afleiding, zie [8].

Bij een verende inklemming levert de veer een koppel dat evenredig is met de rotatie van het aansluitende staafuiteinde.

$$M = k \varphi \quad (40)$$

Hierin stelt k de veerstijfheid voor, die gelijk is aan het moment M bij een hoekverdraaiing ter grootte $\varphi = 1$ (radiaal). Dezelfde definitie is in [548] voor de liggerstijfheid k ingevoerd, die wordt gebruikt bij de methode Cross in KW-6. In deze gevallen wordt de "veer" gevormd door de rotatiestijfheid van een aansluitende staaf.

In fig. 2a is het portaal van fig. [590-2] nogmaals weergegeven, maar nu met een eindige stijfheid van de bovenregel, zodat bij knik de maximale waarde $w = A$ van de sinusvormige uitbuigingslijn pas wordt bereikt voor $x = l_k/2 > l$. Omdat we ter plaatse van de stijlen uitsluitend uitwendige verticale krachten op de bovenregel laten aangrijpen, kunnen er in de scharnierende ondersteuning alleen verticale reactiekrachten optreden. De druklijn van elke stijl loopt dus verticaal.

Het buigend moment op een afstand x vanaf het scharnier is dan gelijk aan, zie fig. 2b:

$$M_x = F * w \quad (41)$$

Verband tussen kromming en moment [506-(4)]:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} \quad (42)$$

Substitutie van (41) in (42) levert :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F w}{EI} = 0 \quad (43)$$

We stellen weer $F/EI = a^2$ waardoor (43) overgaat in:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + a^2 w = 0 \quad (45)$$

De algemene oplossing van deze vergelijking luidt; zie [588]:

$$w = A \sin ax + B \cos ax \quad (46)$$

De randvoorwaarden luiden:

$$w = 0 \text{ voor } x = 0 \rightarrow B = 0$$

$$w = 0 \text{ voor } x = l_k \rightarrow a = \pi/l_k$$

Als we deze waarde van a kwadrateren en substitueren in (44), dan is F daardoor overgegaan in de knikkracht F_k . De grootte van deze knikkracht bedraagt dus:

$$F_k = \pi^2 EI / l_k^2 \quad (47)$$

Voor de uitbuigingslijn bij knik met zijn afgeleiden volgt:

$$\begin{aligned} w &= + A \sin \frac{\pi x}{l_k} \\ \frac{dw}{dx} &= + A \frac{\pi}{l_k} \cos \frac{\pi x}{l_k} \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= - A \frac{\pi^2}{l_k^2} \sin \frac{\pi x}{l_k} \end{aligned} \quad (48a,b,c)$$

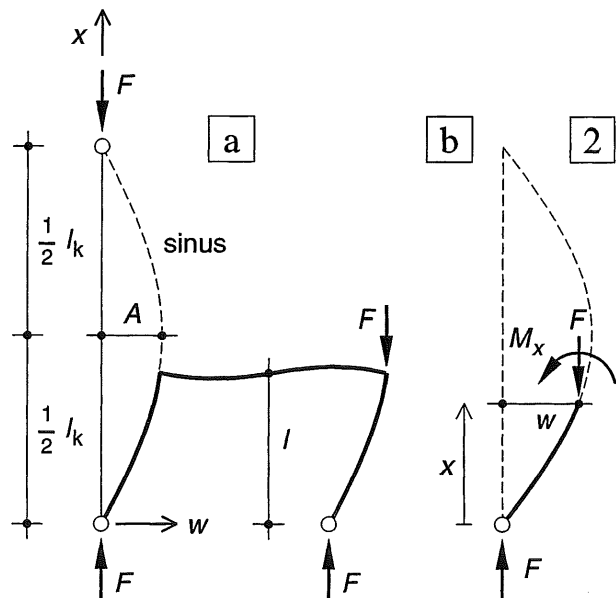


Fig. 2 Éézijdig verend ingeklemde staaf (stijl van het portaal)
a. Uitbuigingsvorm bij knik
b. Opstellen van de differentiaalvergelijking

24.7.2 AANSLUITING STIJL- REGEL

Bij de aansluiting van de stijl aan de regel blijft de rechte hoek tussen beide recht, zodat de rotatie van de regel in punt B gelijk is aan de rotatie van de stijl in punt B, zoals is weergegeven in fig. 1. De randvoorwaarde in B luidt dus:

$$M_B = k \left(\frac{dw}{dx} \right)_B$$

zodat voor $x = l$ moet gelden:

$$-EI \frac{d^2w}{dx^2} = k \frac{dw}{dx} \tag{49}$$

Substitutie van (48c) en (48b) met $x = l$ in (49) levert:

$$EIA \frac{\pi^2}{l_k^2} \sin \frac{\pi l}{l_k} = k A \frac{\pi}{l_k} \cos \frac{\pi l}{l_k} \tag{50}$$

Dit kan worden herschreven als:

$$\cotg \frac{\pi l}{l_k} = \frac{\pi l}{l_k} \left[\frac{EI}{l k} \right] = \frac{\pi l}{l_k} C_1 \tag{51}$$

De vorm tussen haken is een dimensieloos getal dat de verhouding van twee stijfheden voorstelt ; ter wille van de overzichtelijkheid is het weergegeven door C_1 .

De waarde van $\pi l / l_k$ die aan deze vergelijking voldoet, kan niet rechtstreeks in formulevorm worden weergegeven, de grafische oplossing is echter eenvoudig. Als we onderstaande functies uitzetten :

$$y = \cotg \frac{\pi l}{l_k} \quad \text{en} \quad y = C_1 \frac{\pi l}{l_k}$$

dan levert het snijpunt van beide krommen de gezochte waarde van $\pi l / l_k$.

In fig. 2 is op beide assen de grootheid $\pi l / l_k$ uitgezet tussen 0 en π . De grootheid l / l_k loopt dan van 0 tot 1, en deze laatste waarde zullen we gebruiken voor het aflezen. De functie $y = \cotg \pi l / l_k$ is reeds in de figuur ingetekend en we behoeven dus alleen de rechte $y = C_1 \pi l / l_k$ nog maar te tekenen. Aan de rechterzijde is het verhoudingsgetal C_1 uitgezet tussen 0 en 1. We kunnen dan vanuit de oorsprong O een rechte lijn tekenen naar de waarde van C_1 die voor een bepaald geval geldig is.

Op de horizontale as is ook de waarde van l / l_k weergegeven. Beneden deze as is het hyperbolische verloop van de reciproke waarde l_k / l ingetekend, zodat de kniklengte als functie van de lengte l van de stijl direct kan worden afgelezen. De krommen 1 en 2 hebben alleen betekenis voor waarden van $l / l_k \leq 0,5$, maar ter wille van de duidelijkheid is de grafiek weergegeven voor $0 \leq l / l_k \leq 1,0$.

In 24.7.3 is aangegeven hoe de veerstijfheid k van de bovenregel kan worden bepaald, dus ook de coëfficiënt C_1 . Voor twee gevallen is de kniklengte berekend.

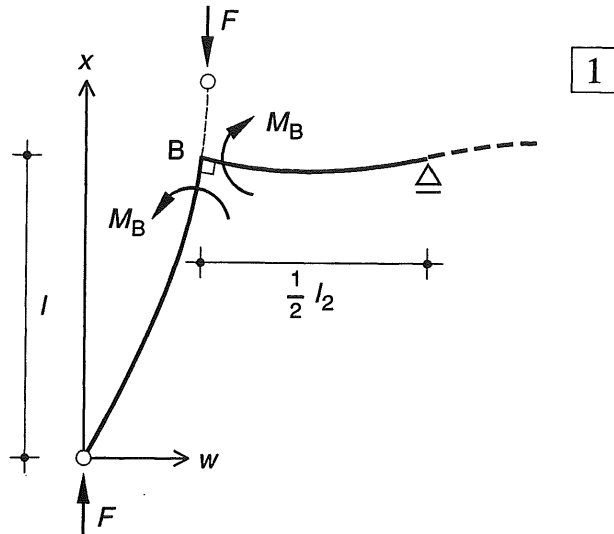
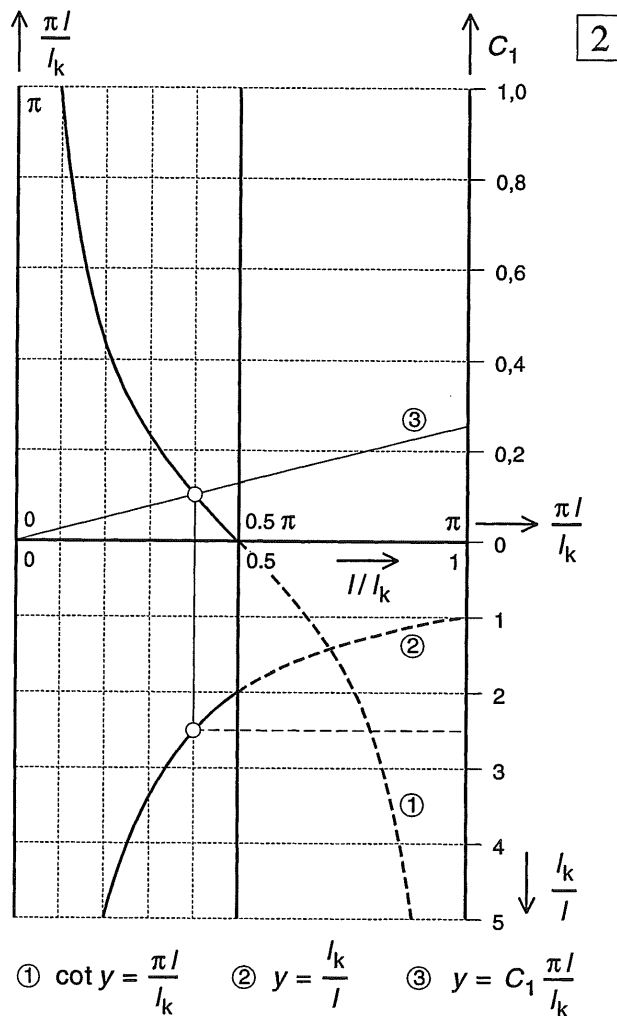


Fig. 1 Aansluiting van stijl aan regel



① $\cot y = \frac{\pi l}{l_k}$ ② $y = \frac{l_k}{l}$ ③ $y = C_1 \frac{\pi l}{l_k}$

Fig. 2 Grafische bepaling van de kniklengte

24.7.3 VEERSTIJFHEID BOVENREGEL

In deze paragraaf zijn alle grootheden van de *stijlen* weer voorzien van een index 1 en van de *regels* van een index 2. Uit figuur [A-501-2a] volgt dat de bovenregel bij knik van de stijlen een momentenverloop vertoont dat is weergegeven in fig. 3.

De hoekverdraaiing van de regel in de punten B en C bedraagt, zie zonodig KW-6 [650-(10)]:

$$\varphi_2 = \frac{M l_2}{6 EI_2} \quad \text{zodat} \quad k = \frac{6 EI_2}{l_2} \quad (52)$$

De vorm tussen haakjes van (51) wordt dan (met indices 1 voor de stijl):

$$C_1 = \frac{EI_1}{l_1} \frac{l_2}{6 EI_2} = \frac{1}{6 \vartheta} \quad (53)$$

Op deze wijze kan de coëfficiënt C_1 dus worden uitgedrukt in de geometrische stijfheidsverhouding ϑ volgens [555-(16)] – die we veelvuldig bij portalen gebruiken – tezamen met een numerieke factor (in dit geval 6) die afhangt van de randvoorwaarden voor de bovenregel.

Voorbeeld:

Gegeven een portaal waarvoor geldt:

$$l_2 = 2 l_1 \quad EI_2 = 4 EI_1$$

$$\vartheta = \frac{l_1}{l_2} \frac{EI_2}{EI_1} = \frac{1}{2} \frac{4}{1} = 2 \quad C_1 = \frac{1}{6 * 2} = 0,083$$

De bijbehorende rechte $y = 0,083 \pi l_1 / l_k$ is in fig. 4 weergegeven als lijn 3. Door het snijpunt met lijn 1 wordt een rechte omlaag getekend tot hij lijn 2 snijdt. De kniklengte blijkt dan gelijk te zijn aan $l_k = 2,15 l_1$.

Bij een oneindig stijve bovenregel wordt de factor ϑ oneindig groot en geldt $C_1 = 0$. In dat geval wordt het snijpunt van de cotangens bepaald met de horizontale as en volgt $l_k = 2,00 l_1$.

In het eerstgenoemde geval is de grootte van de knikkracht dus gelijk aan $(2,00 / 2,15)^2 = 86\%$ van de knikkracht bij het portaal met de oneindig stijve bovenregel. Deze verschillen blijven dus relatief klein.

Bij afnemende liggerstijfheid van de bovenregel neemt de waarde van C_1 toe. Voorbeeld:

$$l_2 = 3 l_1 \quad EI_2 = EI_1$$

$$\vartheta = \frac{l_1}{l_2} \frac{EI_2}{EI_1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \quad C_1 = \frac{1}{6 * 1/3} = 0,5$$

De bijbehorende rechte $y = 0,50 \pi l_1 / l_k$ is in fig. 4 weergegeven als lijn 4 met als bijbehorende kniklengte:

$l_k = 2,9 l_1$. Ten opzichte van het standaardgeval met de oneindig stijve bovenregel is de knikkracht – bij gelijkblijvende EI_1 – dan teruggevallen tot $(2,0 / 2,9)^2 = 48\%$.

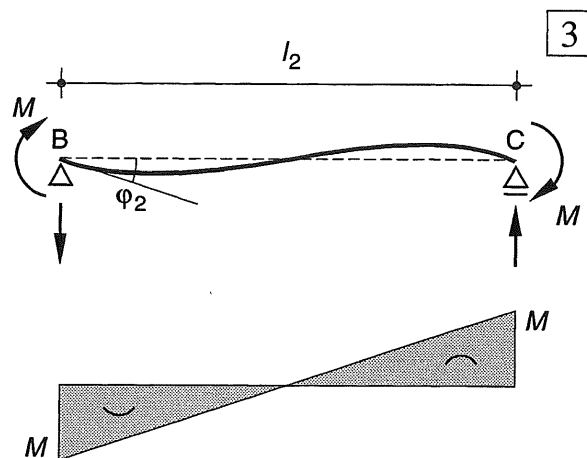


Fig. 3 Bepaling van de veerstijfheid van de bovenregel

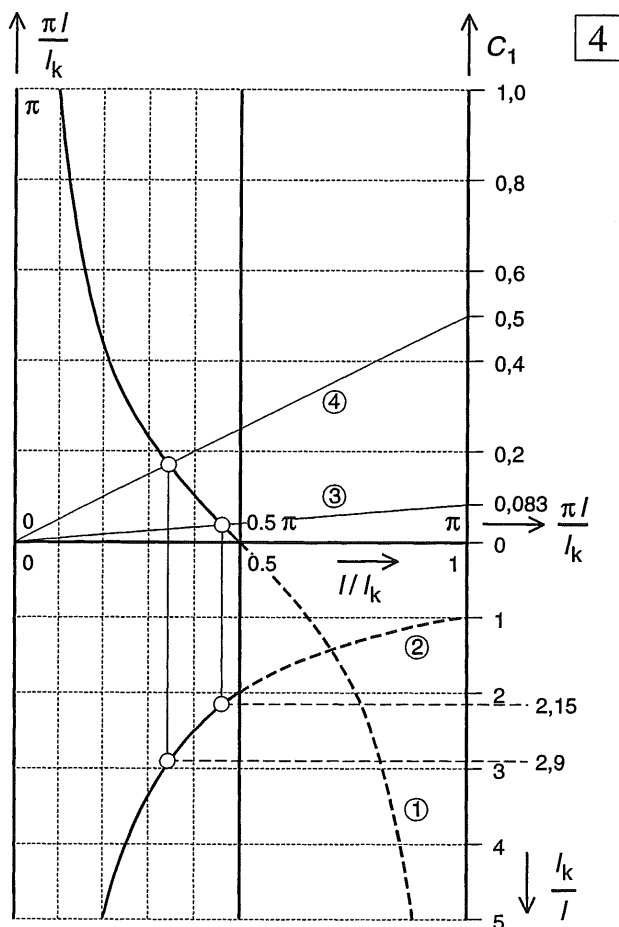


Fig. 4 Grafische bepaling van de kniklengte voor twee gevallen

24.7.4 TWEEZIJDIG VEREND
INGEKLEMDE STAAF

Als bij een portaal zoals in fig. [590-3] zowel de ondersteuning als de bovenregel als een verende inklemming moet worden beschouwd, dan zal een situatie ontstaan zoals in fig. 1 is weergegeven.

We kiezen het – nog onbekende – momentennulpunt van de uitbuigingslijn bij knik als oorsprong, en het enige dat we vooralsnog weten is: $l'_1 + l''_1 = l_1$

Maar voor beide liggerdelen moet dan – op geheel overeenkomstige wijze als is afgeleid in 24.7.2 – ook het volgende gelden; zie formule (51):

$$\cotg \frac{\pi l'_1}{l_k} = C'_1 \frac{\pi l'_1}{l_k}$$

$$\cotg \frac{\pi l''_1}{l_k} = C''_1 \frac{\pi l''_1}{l_k}$$

De oplossing is eenvoudig als de stijfheden van de beide verende inklemmingen gelijk zijn, dus $C'_1 = C''_1$ want dan volgt: $l'_1 = l''_1 = 0,5 l_1$

Als beide uiteinden van de stijl volledig zijn ingeklemd, dan volgt $C'_1 = C''_1 = 0$ en de kniklengte bedraagt, geheel overeenkomstig fig. [590-3]:

$$l_k = 2,0 * l'_1 = 2,0 * 0,5 l_1 = l_1$$

Voor waarden van $C'_1 = C''_1 > 0$ verloopt de procedure zoals is beschreven in 24.7.3.

Zijn de veerstijfheden aan beide staafuiteinden niet gelijk, dan kan als volgt iterenderwijs te werk worden gegaan. We nemen het momentennulpunt weer ter halverhoogte van de stijl aan en bepalen zowel voor $l'_{1a} (= 1/2 l_1)$ als voor $l''_{1a} (= 1/2 l_1)$ de kniklengte. Hieruit volgen dan ongelijke waarden voor l_k .

Vervolgens verplaatsen we het momentennulpunt over een kleine afstand in de goede richting en herhalen de berekening voor de twee éézijdig verend ingeklemde portalen. Het verschil tussen beide kniklengten zal hierdoor kleiner worden. De juiste waarde wordt bereikt als de kniklengte voor beide portalen hetzelfde is.

Het zal blijken dat voor elke opeenvolgende situatie de gemiddelde waarde van beide kniklengten maar weinig afwijkt van de juiste kniklengte.

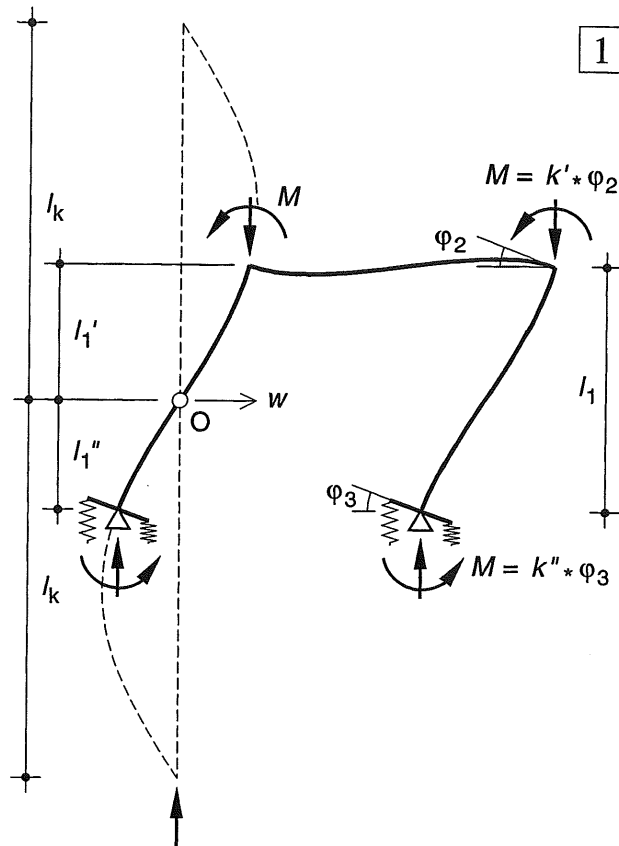


Fig. 1 Tweezijdig verend ingeklemde staaf

NB

Bij de grafische bepaling van de kniklengten staan de uitkomsten vermeld met een nauwkeurigheid die niet uit de grafieken is af te lezen en die ook niet noodzakelijk is voor een globale dimensionering.

In feite is met het computerprogramma Graphing Calculator de cotangens uitgezet als (1 : tangens). Van het snijpunt met de rechte lijn worden dan automatisch de coördinaten weergegeven

24.7.5 VEREND INGEKLEMD PORTAAL

Een verend ingeklemd portaal volgens fig. 2a wordt gesplitst gedacht in twee tweescharnierspanten volgens fig. 2b. Voor beide spanten is de lengte van de stijl dus gehalveerd terwijl de boven- en onderregel – die de waarde van k volgens formule [A-503-(52)] bepalen – gelijk zijn gebleven. Als bij het onderste tweescharnierspant de halve stijlen niet buigvast zijn verbonden met een funderingsbalk, dan zal de waarde van k op een andere manier moeten worden ingeschat of berekend.

VOORBEELD 1

Gegeven: de numerieke waarde voor de geometrische stijfheidsverhouding ϑ voor de twee afgesplitste portalen volgens fig. 2b.

$$\vartheta' = 0,37 \rightarrow C'_{1a} = 1 / (6\vartheta') = 0,45 \text{ en}$$

$$\vartheta'' = 0,67 \rightarrow C''_{1a} = 1 / (6\vartheta'') = 0,25$$

a. *Eerste aanname: momenten-nulpunt op halve hoogte*

Bovenste deel van de stijl, fig. 3:

$$C'_{1a} = 0,45 \rightarrow l_k = 2,83 \quad l'_{1a} = 2,83 * 0,50 l_1 = 1,42 l_1$$

Onderste deel van de stijl, fig. 3:

$$C''_{1a} = 0,25 \rightarrow l_k = 2,48 \quad l''_{1a} = 2,48 * 0,50 l_1 = 1,24 l_1$$

Als eerste benadering gaan we gewoon uit van de gemiddelde waarde voor de kniklengte:

$$l_k = (1,42 l_1 + 1,24 l_1) / 2 = 1,33 l_1$$

Voor alle zekerheid bepalen we de kniklengte wat nauwkeuriger. Het onderste deel met de grootste veerstijfheid – dus met de laagste waarde van C_1 – moet dan wat langer worden en het bovenste deel met de kleinste veerstijfheid wat korter.

b. *Tweede aanname voor het momenten-nulpunt*

We proberen $l'_{1b} = 0,45 l_1$ en $l''_{1b} = 0,55 l_1$.

Uit formule (51) volgen dan als nieuwe waarden voor de coëfficiënten C_1 :

$$C'_{1b} = (l'_{1a} / l'_{1b}) C'_{1a} = (0,50 / 0,45) 0,45 = 0,500$$

$$C''_{1b} = (l''_{1a} / l''_{1b}) C''_{1a} = (0,50 / 0,55) 0,25 = 0,227$$

Met behulp van fig. 3 volgt dan:

$$C'_{1b} = 0,500 \rightarrow l_k = 2,92 \quad l'_{1b} = 2,92 * 0,45 l_1 = 1,31 l_1$$

$$C''_{1b} = 0,227 \rightarrow l_k = 2,44 \quad l''_{1b} = 2,44 * 0,55 l_1 = 1,34 l_1$$

De waarden voor de kniklengte ontfloren elkaar nauwelijks zodat we zonder meer de gemiddelde waarde kunnen gebruiken, namelijk $l_k = 1,325 l_1$.

Verder blijkt dat we deze waarde bij onze eerste iteratie in feite al hebben bereikt.

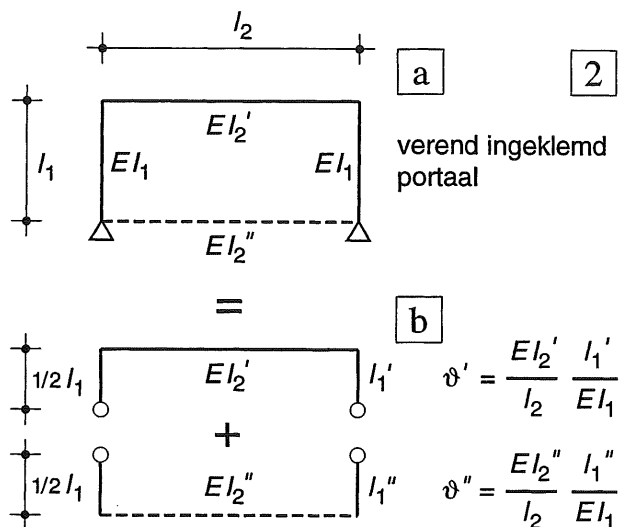


Fig. 2 Splitsen van een portaal in twee-scharnierspanten

a. Oorspronkelijk portaal

b. Vervanging door twee twee-scharnierspanten waarbij we starten met $l'_1 = l''_1 = 1/2 l_1$ en we proberen deze lengten aanpassen, waarbij uiteraard geldt $l'_1 + l''_1 = l_1$

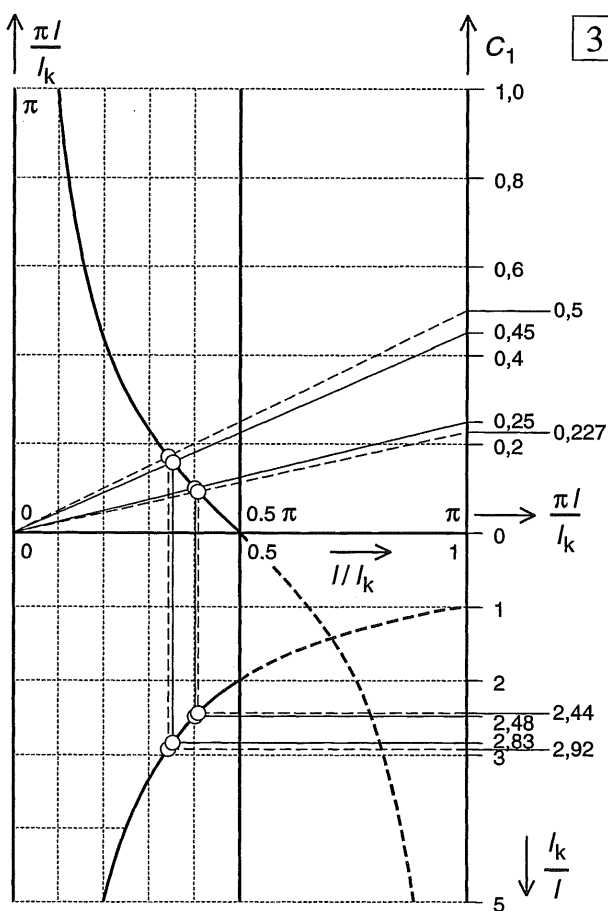


Fig. 3 Grafische bepaling van de kniklengte

24.7.6 VOLLEDIG INGEKLEMD PORTAAL

We onderzoeken ook een wat extremer geval, waarbij het portaal aan de onderzijde volledig is ingeklemd, maar waarbij de inklemming aan de bovenzijde een stuk kleiner is dan in [A-505].

VOORBEELD zie fig. 1

Gegeven: de verhoudingen van de veerstijfheden door middel van de coëfficiënten: $C'_{1a} = 1,00$ en $C''_{1a} = 0$

a. *Eerste aanname: momentennulpunt op halve hoogte*
 $C'_{1a} = 1,00 \rightarrow l_k = 3,65$ $l'_{1a} = 3,65 * 0,50$ $l_1 = 1,83$ l_1
 $C''_{1a} = 0 \rightarrow l_k = 2,00$ $l''_{1a} = 2,00 * 0,50$ $l_1 = 1,00$ l_1
 Als eerste benadering gaan we weer gewoon uit van de gemiddelde waarde voor de kniklengte:
 $l_k = (1,83 l_1 + 1,00 l_1) / 2 = 1,415 l_1$

b. *Tweede aanname; momenten-nulpunt 0,1 l₁ omhoog*
 We verplaatsen het momentennulpunt nu wat meer naar boven dan in het vorige geval en gaan uit van:
 $l'_{1b} = 0,40 l_1$ en $l''_{1b} = 0,60 l_1$.

Uit formule (51) volgen dan de nieuwe waarden:
 $C'_{1b} = (l'_{1a} / l'_{1b}) C'_{1a} = (0,50 / 0,40) 1,00 = 1,25$
 $C''_{1b} = (l''_{1a} / l''_{1b}) C''_{1a} = (0,50 / 0,60) * 0 = 0$
 We vinden dan de volgende kniklengten:
 $C'_{1b} = 1,25 \rightarrow l_k = 3,97$ $l'_{1b} = 3,97 * 0,40$ $l_1 = 1,59$ l_1
 $C''_{1b} = 0 \rightarrow l_k = 2,00$ $l''_{1b} = 2,00 * 0,60$ $l_1 = 1,20$ l_1
 Gemiddelde: $l_k = (1,59 l_1 + 1,20 l_1) / 2 = 1,395 l_1$

c. *Derde aanname; momenten-nulpunt 0,2 l₁ omhoog*
 We verplaatsen het momentennulpunt nog verder naar boven en gaan uit van:
 $l'_{1c} = 0,30 l_1$ en $l''_{1c} = 0,70 l_1$.

Uit formule (51) volgen dan de nieuwe waarden:
 $C'_{1c} = (l'_{1a} / l'_{1c}) C'_{1a} = (0,50 / 0,30) 1,00 = 1,66$
 $C''_{1c} = (l''_{1a} / l''_{1c}) C''_{1a} = (0,50 / 0,70) * 0 = 0$
 We vinden dan de volgende kniklengten:
 $C'_{1c} = 1,66 \rightarrow l_k = 4,46$ $l'_{1c} = 4,46 * 0,30$ $l_1 = 1,34$ l_1
 $C''_{1c} = 0 \rightarrow l_k = 2,00$ $l''_{1c} = 2,00 * 0,70$ $l_1 = 1,40$ l_1
 Gemiddelde: $l_k = (1,34 l_1 + 1,40 l_1) / 2 = 1,37 l_1$

In fig. 3 is voor het bovenste en het onderste deel van de stijl, de kniklengte uitgezet als functie van de ligging van het momenten-nulpunt. Het snijpunt van beide lijnen levert dan als kniklengte: $l_k = 1,37 l_1$

Globale dimensionering op knik:

Uit de voorbeelden in [A-505-506] blijkt dat ook voor tweezijdig verend ingeklemde liggers, kan worden volstaan met de nevenstaande werkwijze: \longrightarrow

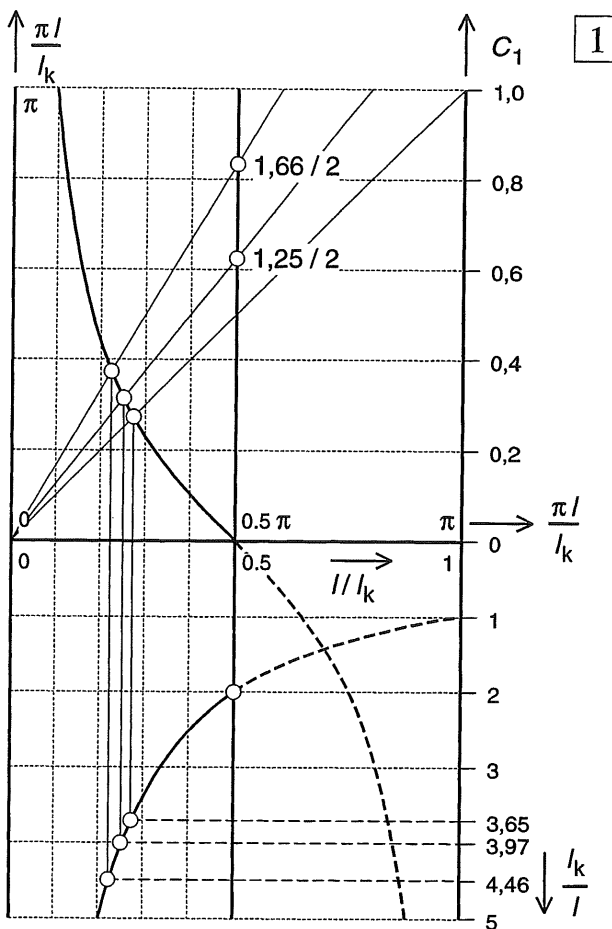


Fig. 1 Grafische bepaling van de kniklengte

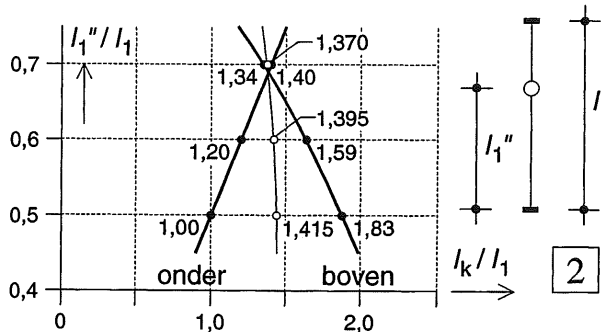


Fig. 2 Kniklengte voor beide staafhelften als functie van de ligging van het momentennulpunt, en grootte van de gemiddelde waarde, zie ook fig. [A-505 - 2b]

- momenten-nulpunt aannemen halverwege de staaflengte
 - kniklengten grafisch bepalen voor elke staafhelft
 - gemiddelde van de kniklengten aanhouden
- De kniklengte wordt dan iets te hoog geschat dus de knikkracht wat te laag;
 Hierdoor blijven we aan de veilige kant

INLEIDING

De trefwoordenlijst van April 1999 heeft betrekking op de volgende delen:

- 0 BASISKENNIS
- 2 LIGGERS
- 3 VAKWERKEN , STANDZEKERHEID
- 4 SPANNINGEN
- 5 VERVORMINGEN

Deel 1 is in bewerking en (nog) niet verkrijgbaar in de bouwshop. Het omvat enkele elementaire mechanica-modellen, waarbij de hoofdkrachtenafdracht voornamelijk plaats vindt via normaalkrachten. Hierbij zijn twee hoofdbestanddelen te onderscheiden:

- 1 De grafische constructie met poolfiguur en stangenveelhoek, voor koorden, bogen, koepels en gewelven .
- 2 De Stapelsteen-mechanica voor metselwerk

De combinatie van 1 en 2 geeft een goed inzicht in de hoofdkrachtenwerking van historische gemetselde of gestapelde gebouwen zoals kathedralen of tempels uit de oudheid. Met behulp van 1 is eveneens inzicht te verkrijgen in enkele moderne constructievormen, zoals kabelconstructies.

In de andere dictaten wordt incidenteel verwezen naar deel 1. Studenten kunnen bij de leerstoel Krachtenwerking die onderdelen verkrijgen waarvan ze gebruik willen of moeten maken.

Hetzelfde geldt voor de onderstaande delen, waarvan de opzet momenteel wordt gewijzigd :

- 6 Portalen en Raamwerken
- 7 Spanningsleer

Zoals vermeld heeft de voorliggende trefwoordenlijst uitsluitend betrekking op de volgende delen: 0 - 2 - 3 - 4 - 5.

Ze wordt in principe aan alle nieuwe drukken van de dictaten toegevoegd en zonodig aangevuld en uitgebreid.

TOELICHTING TREFWOORDENLIJST

Het eerste cijfer van elke pagina waarnaar wordt verwezen geeft het betreffende deel aan.

In deel 5 liggen de pagina's dan tussen 500 en 599. Een cursieve nummering – bijv. 504 – heeft betrekking op het voorwerk aan het begin van deel 5, terwijl een notatie als A-504 betrekking heeft op de appendix aan het eind van dat deel.

Voor een goed overzicht zijn de bladzijde-nummers die op hetzelfde deel betrekking hebben, zoveel mogelijk onder elkaar geplaatst.

De hoofdtrefwoorden beginnen steeds met een hoofdletter en zijn alfabetisch geordend.

Bij diverse hoofdtrefwoorden is gebruik gemaakt van een onderverdeling, beginnend met een streepje en dan de omschrijving beginnend met een kleine letter in een kleiner lettertype, bijv.

Actie = Reactie

- voor uitwendige krachten
- voor inwendige krachten

Bij deze onderverdeling is meestal een systematische opbouw gebruikt en geen alfabetische. Kijk dus even wat er staat.

Bij sommige uitgebreide opsommingen is het hoofdtrefwoord weergegeven in hoofdletters, de primaire onderverdeling met 1, 2, 3 De secundaire onderverdeling wordt dan aangegeven met één streepje en de tertiäre met twee streepjes.

BEREKENING LIGGERS

- 1 Vrij opgelegde ligger
 - belasting één puntlast
 - belasting meer puntlasten
 - – idem grafisch

Als hetzelfde hoofdtrefwoord meer dan eens wordt genoemd, omdat er in de onderverdeling andere aspecten worden behandeld, dan wordt dat met romeinse cijfers aangegeven

VERVORMINGEN I

.....

VERVORMINGEN II

.....

Druklijn	396	468-471	
- definitie		468	
- toepassing bij driescharnierspanten	395-396		
- toepassing bij kolommen		468-471	
Drukpunt		469	
Dubbele buiging		460-463	
Dwarscontractie	095	414; 422	
Dwarscontractie-coëfficiënt =			
= contractie-coëfficiënt	095	414	
- numerieke waarden	096		
Dwarskracht	218		
Dwarskrachtcentrum		498	
Dwarskrachtenlijn	228-235		
[zie ook: Diagrammen snedekrachten (Liggers)]			
Eenheden (omschrijving)	011		
Eenzijdig ingeklemde ligger	207; 270		514
Eigen gewicht	075		
Elasticiteitsmodulus	094; 096		414
- numerieke waarden	096		
Evenwicht			
- indifferent	037		
- labiel	037; 042-043		
- stabiel	037; 042-043; 052-053		
- overgang stabiel → labiel	066-067		
Evenwichtbeschouwingen liggers	217		
Evenwichtsvoorwaarden	026-029		
- in het platte vlak	034		
- in de ruimte	036		
Excentriciteit		471	
Excentrisch belaste doorsnede		470	
Excentrische druk of trek		417; 475	
[zie ook: Buiging plus normaalkracht]			
Excentrische dwarskracht			
[zie: Wringing plus dwarskracht]		498	
Flens		485	
Fundering	055		
- op staal	055		
- op palen	055		
- schematisering ondergrond	056-057		
Gaapvergelijkingen		533	
Gedeeltelijk meewerkende dsn		475	
Geknikte ligger:			
- L-vorm		542	
- T-vorm		543	
- spanningsverdeling in de knik		544-545	
Geometrische liggerstijfheid		549	
Geometrische stijfheidsverhouding		541	
Gereduceerd momentenvlak		573	
Glijdingsmodulus (afleiding)		499A	
Gravitatiwet	030		
Grond (eigenschappen)	057		

Hoofdassen			425
Horizontale belasting			
- op portalen		383	
- op een driescharnierspant		397	
Incassingsvermogen	081		
Ingekleemde ligger	209		
Inklemming		356	
- verend	207	356-357	
- volledig	207-209	356-357	
- invloed ligging oplegreacties	208		
Integraal-rekening:			
- grondbeginselen	258-259		
- bepaalde integraal	260		
- integreren			
(analytisch en grafisch)	261		
Inwendige hefboomsarm			420
Kantelen	052		
Keersymmetrie [zie: Symmetrie]			
KERN			
1 Voor spanningsberekening			
- bij rechthoekige doorsnede		475-476	
- - volledig meewerkende dsn		476	
- - gedeeltelijk meewerkende dsn		477	
2 Onderdeel constructie			
= Stijve kern		365	
KNIK		416	582
- omschrijving			582
- invloed vervormingen			583
- berekening volgens Euler		584-585	
- verklaring knikverschijnsel		586	
1 Basis-belastinggevallen			
- ongeschoorde portalen		590	
- geschoorde portalen		591	
2 Knik in onderling loodrechte richtingen		594	
3 Knik bij buiging + normaalkracht		596	
- buigbelasting sinusvormig		597-598	
Knikkraft			584
Kniklengte		585; 587	
- schetsen van kniklijnen		589	
Knikspanning			592
- algemene formulering			595
- globale dimensionering (voorbeeld)		592-593	
- - bij $N + M$ (voorbeeld)		599	
Kolom			466
Koord			300-301
Koppel	004		
Krachten-methode			529

KRACHT

[zie ook: SAMENSTELLEN,

Verplaatsen, Ontbinden van krachten]

- omschrijving 000-001
- definitie volgens Newton 032
- actie = reactie 031; 041
- evenwichtmakende kracht 010
- ontbondene van een kracht =
component van een kracht 007
- resulterende kracht 010
- tekenafspraken 012
- weergave:
- - grafisch 008;001
- - analytisch 001

Krachten op liggers:

- actie-krachten (uitwendige kr.) 207-209; 214
- reactiekrachten 214
- - tekenafspraken 216
- verwisselen actie- en reactiekr. 214; 236
- inwendige krachten (spanningen) 209

Krachtendriehoek 007

Krachtenveelhoek 011

Krachtswerking
(omschrijving vakgebied) 016

Kromming 423 504-505

Kromtestraal 419; 423

Kwadratisch oppervlaktemoment 425; 428; 448

- van een driehoek 435

- van een rechthoek 432

- van een cirkelvormige dsn 436

- van een parallelogram 435

- van dunwandige profielen 449

MATERIAAL EIGENSCHAPPEN

- 1 constructiemateriaal 094
- 2 ideaal materiaal (definitie) 095
- contractie-coëfficiënt 095-096
- elasticiteitsmodulus 095-096
- uitzettingscoëfficiënt 097
- Mechanica (definitie) 016
- Meerbeukig portaal 382
- Meewerkende doorsnede 477
- Membraan-analogie 496
- Methode Cross 548
- Moment 004
- definitie statisch moment 004
- definitie buigend moment 218
- tekenafspraken 033

MOMENTENLIJN LIGGER

[zie ook: LIGGERS]

1 Basis-belastinggevallen:

- vrij opgelegde ligger met 1 puntlast 244-246
- vrij opgelegde ligger met q -last 244-247
- uitkragende ligger met één puntlast 245
- uitkragende ligger met q -last 245

2 Variërende belasting

- Max. en minimum M -lijnen
- - q -last 286
- - verplaatsbare puntlast 287

3 Visualisering van de vorm

- m.b.v. een koord 296-299

Momentensom 527

Momentenvlak-methode 574

- methode I (vrij opgelegde ligger) 568-572

- methode II (éénzijdig ingeklemde ligger) 574-575

L-vormige ligger 542

Labiël evenwicht 042

LIGGER

- definitie 202 301-302
- vrij opgelegd (rol + scharnier) 206 568
- vrij opgelegd met overstek 232; 273
- eenzijdig ingeklemd 207; 209; 225
- over meer steunpunten 535
- - extra inwendige scharnieren 210; 212; 289-291
- - zonder inwendige scharnieren 290-291
- ondersteund door pendelstijlen 210
- - berekening oplegreacties 212-213
- - instabiele varianten 211

Lijf 485

Lijnvormige elementen:

- koorden, liggers, staven 300-301

Lijnspanningstoestand 410-411

Lineair oppervlakte-moment 424, 428; 479

Lineair variërende belasting 241

Lineaire uitzettingscoëffici. 097

Neutrale lijn 418

Newton 032

Normaalkracht 098 417

Normaalkracht + buigend moment 464

Normaalspanning 408; 426

Normale doorsnede 408; 411

Nulstaven (vakwerk) 338-339

ONDERSTEUNINGEN

[zie ook: OPLEGGINGEN]

1 Ondersteuningen I

- continu 039
- lijnvormig 039
- puntvormig 039
- star 040
- verend 040; 055-068

2 Ondersteuningen II

- inklemming 207-209
- pendelstijl 210-211
- rol 206-208
- scharnier 206-208

ONDERSTEUNINGEN	
3 Ondersteuning rechthoekig blok (3D)	
- in één punt (koord)	040-041
- in drie punten (star)	044-046
- continu door de ondergrond	
- - alleen verticale belasting (e.g.)	059
- - alleen horizontale belasting (wind)	060
- - verticale + horizontale belasting	062-063
- - gedeeltelijk meewerkend grondvlak	064-065
Ontbinden van krachten	
1 In het platte vlak:	
- inleiding eenvoudige gevallen	022-023
- langs drie gegeven werklijnen	024-025
2 In de ruimte	
	035
- Ontbondenen (van een kracht)	008
OPLEGGINGEN	087
1 Ideale opleggingen:	
rol, scharnier, volledige inklemming	
- ruimtelijk	088
- in het platte vlak	089
2 Realistische opleggingen	
- voorbeelden	090
Oplegreacties ligger (berekening):	
- vrij opgelegde ligger	219
- éénzijdig ingeklemde ligger	225
Oppervlakte	428
Oppervlakte-moment;	425; 439
[zie ook: Doorsnede grootheden]	
Oppervlakte-produkt;	425
[zie ook: Doorsnede grootheden]	
Optimaliseren ligger:	
- door verplaatsen v.d.opleggingen	288
Overgangsmoment	533
Paraboolvormige vakwerken	350
Parallelogram v. krachten	007
Pendelstijl	210
Permanente belastingen	074
Polonceauspant	315
Poolfiguur	293
PORTAAL	
1 omschrijving	
	202-203
- eenbeukig, meerbeukig	203
- globale analyse	378-380 546-547
2 Berekening	
- onder een verticale q -last	
- - vergelijking met doorgaande ligger	546-547
- - berekening doorgaande liggers	548-549
- twee-scharnierspant	550-551
- onder een horizontale puntlast	359; 383
- ligger op twee ingeklemde stijlen	552
- volledig ingeklemd portaal	554-555
- - algemene formules portalen	555

Raamwerk (omschrijving)	203
- éénbeukig raamwerk = stapeling van portalen	
- - verticale belasting	381
- - horizontale belasting	383-385
Randvoorwaarden	091 259; 270
- invloed op verplaatsingen ligger	237
Rechthoekige staaferken	312
Regel (constructiedeel; definitie)	202 540
Regel van Steiner	430-433
Rek	414; 423 557
Rekstijfheid	414 557
Relatie buigend moment - vervorming ($M - \kappa$) diagram	502
Relatie vervorming en belasting ($\varphi, w - q$)	506-507
Resultante	008
- van twee krachten	010
Rol, Roloplegging	088

SAMENSTELLEN VAN:	
1 Krachten	
- Twee krachten door één punt:	
- - analytische oplossing	008
- - krachtendriehoek (grafisch)	007
- - parallelogram van krachten	007
- Meer krachten door één punt:	
- - krachtenveelhoek (grafisch)	011
- Krachten niet door één punt:	
- - inleidende beschouwingen	013
- - analytische opl. (bewerkelijk)	017-019
- - grafische oplossing	016
- Krachten zijn evenwijdig:	
- - analytische oplossing	020-021
2 Kracht + koppel	015
3 Momenten	033
Scharnier	088
Schematiseren, Inleiding	068-069
Schematiseren van:	
- de constructie	083
- constructie-onderdelen	086
- materiaal-eigenschappen	094-095
- opleggingen	087; 091-093
Schijven	368; 371-373
Schoren	367
Schuifspanning algemeen	408; 411
Schuifspanningsverloop	
- ten gevolge van dwarskracht	480-485
- ten gevolge van wringing	487-494
Snede-krachten (definitie)	218
- Buigend moment M	218
- Dwarskracht V	218
- Normaalkracht N	218
- Tekenafspraken N, V, M	224-225
- Tekenen v. diagram. N, V, M	226-235

Sneeuwbelasting	077		
Soortelijke massa van lucht		401	
SPANNING I			
1 Algemeen		401; 406	
- in gassen en vloeistoffen		401	
- in vaste stoffen		402-403	
- in steenachtige materialen		404-407	
2 In een ideaal materiaal			
- definitie		406	
- notatie		408-409	
- teken (2D)		408	
- teken (3D)		409	
SPANNING II (naamgeving)			
1 Buigspanning =			
= lineair verlopende normaalspanning		426; 465	
- formules		426-427	
2 Normaalspanning (constante spanning)		408; 426; 465	
3 Resulterende spanning		408	
4 Schuifspanning t.g.v. dwarskracht bij:		408; 456	
- een rechthoekige dsn		481	
- een samengestelde rechthoekige dsn		478-480	
- dunwandige profielen		482-483	
- - vereenvoudigde berekening		484	
5 Schuifspanning t.g.v. wringing		487-493	
6 Belang horizontale schuifsp. bij buiging		485	
Spannings-rek-diagram		414	
Spanningscombinaties [zie: SPANNINGSVERDELING II]			
SPANNINGSVERDELING I			
1 Bij één basisbelastingeval			
- t.g.v. Buigende momenten		418-426	
- t.g.v. Dwarskrachten		478-484	
- t.g.v. Normaalkrachten	094	416-417	
- t.g.v. Wringende momenten		486-497	
- - bij kokerprofielen		494-497	
SPANNINGSVERDELING II			
2 Spanningscombinaties		452	
- teken van de veerkrachtsgevallen		453	
3 Combinaties van veerkrachtsgevallen		454-455	
- buiging + dwarskracht		456	
- - buiging om de y-as of de z-as		458-459	
- - dubbele buiging		460-463	
- buiging + normaalkracht		464-467	
- - invoering druklijn		468-469	
- - excentrisch belaste rechth. dsn.		470-471	
- - dubbele buiging + normaalkracht		474	
Spant			
- omschrijving	203	308	
- twee-scharnierspant	203		
- drie-scharnierspant	203	407	
Staaft (definitie)	202	300-301	
Staaftwerk			
- driehoekig stramien		302	
- rechthoekig stramien		303	
- - buigvaste verbinding staven		304	
Stabiel evenwicht		042	
Stabiliteit		037; 070	354
Stabiliteit (constructie-eis)		073	
- 1e orde stabiliteit; [zie: Standzekerheid]			
- 2e orde stabiliteit; [zie: Knik]			
Standzekerheid (omschrijving)			354-355
Stangenveelhoek		293	
Stapelbouw 3D			
- verschillende wijzen van stapelen			360-361
- standzekerheid			362-363
- - opbouw uit lijnvormige elementen			364-366
- - opbouw uit vlakke elementen			368-369
Stapelring van portalen			381
Statisch bepaald hoofdsysteem			530
Statisch bepaalde constructie			
- omschrijving	204		528
- berekening statisch bepaalde ligger			502
Statisch bepaalde staafwerken en vakwerken		308	
Statisch moment (= lineair oppervlakte-moment)			428
Statisch onbepaalde constructies			
- omschrijving	204		529
- berekening statisch onbep. ligger	205		503
Steenachtige materialen ?			404
Sterkte (constructie-eis)	071		
Stijfheid (constructie-eis)	072		
- Cross-stijfheid (= liggerstijfheid)			541
- Staaft-stijfheid			541
Stijl (constructie-onderdeel; - definitie)	202		540
Stijve kern		365	
Stroomlijnen-analogie			487
Structuur-Mechanica			404-407
Stuik			557
Stuwdruk (wind)	078		
- numerieke waarden	079		
Stijgende diagonalen		327	
SUPERPONEREN VAN MOMENTENLIJNEN LIGGERS			
Overzicht methoden I, II, III		278	
I Splitsen van de belasting			
- momenten van gelijk teken		279	
- momenten van ongelijk teken		280	
- voorbeelden		281	
II Splitsen van de ligger in moten		282	
- combinatie van I en II		283	
III Verplaatsen v. d. opleggingen		284	
- combinatie van II en III		285	
Symbolen			
- omschrijving		010	
- lijst van symbolen		012	
Symmetrie en Keersymmetrie			
- belasting op koorden		297	560
- belasting op liggers		296-297	

Tekenaafspraken vervormingen:					
- helling		505			
- kromming		505			
- zakking		505			
Teken van snedekrachten	224				
- tekenafspraken			431		
Temperatuur	097				
Tensor			408		
Traagheidsmoment			428		
[zie: Kwadratisch oppervlakte-moment]					
Trek, trekkracht (vakwerk)		309			
Twee-scharnierspant		378		540; 550	
<hr/>					
Uitzettings-coëfficiënt	097				
<hr/>					
Vakwerken (omschrijving)	203	314			
- vakwerkvormen		315			
- schematisering		316			
Vakwerkligger	203	314			
Vakwerkspant	203	315			
Vallende diagonalen		327			
Variërende buigstijfheid			573		
Vector					
- kracht-vector	008	001			
- moment-vector	033				
Veerkrachtsgevallen			452-455		
Veerstijfheid	064				
Veranderlijke belastingen	074				
- op vloeren	076				
Verende inklemming		207			
Veren-model					
- voor een buigend moment op een staaf	099				
- voor een normaalkracht op een staaf	098				
- voor de ondergrond	056-057				
- - gedeeltelijk meewerkend grondvlak	065				
Vergeet-me-nietjes			517; 576		
- toepassingen			520-521		
- controle basis-belastinggevallen			524-525		
Verplaatsen van een kracht					
- langs de werklijn	001				
- buiten de werklijn	014				
Verplaatsingsmethode			529		
Versterkte balken			564		
Verstijvingskruis		367			
Verticale schijven		368			
VERVORMINGEN I					
1 Principe					
- bij een lijnspanningstoestand		414			
- bij zuivere buiging		418			
- bij wringing + dwarskracht		499			
- bij zuivere afschuiving					
- - bepaling glijdingsmodulus			A-400		
2 Oorzaak vervormingen bij liggers					
- door buigende momenten				565	
- door normaalkracht				558	
- door schuifspanningen				A-400	
3 Constructie-type					
- vrij opgelegde ligger		233			
- - invloed randvoorwaarden		237			
VERVORMINGEN II : Rekenmethodiek bij:					
1 Normaalkrachten				556-564	
- bij twee geschoorde staven				558-559	
- bij een symmetrisch belast koord				561	
- bij vakwerken (Williot)				563	
- bij een versterkte balk				564	
2 Buigende momenten analytisch					
- benodigde differentiaalvergelijking				565	
- splitsen van de differentiaalvergelijking				566-567	
3 Buigende momenten grafisch:					
Momentenvlak-methode I ,					
- voor vrij opgelegde liggers				558-569	
- - belast door een puntlast				570-571	
- - belast door een q -last				572	
4 Buigende momenten grafisch:					
Momentenvlak-methode II,					
- voor éénzijdig ingeklemde liggers				574-578	
- - recapitulatie vergeet-me-nietjes				576-577	
- - algemene toepassing				578	
- - willekeurig gekromde ligger				579	
- volledig ingeklemd portaal				580	
- drie-scharnierspant				581	
Verwelling				486	
Vlak staafwerk		308			
Vlakke spanningstoestand				412-413	
Vlakke doorsneden blijven vlak				418	
Volledig ingeklemd portaal				554	
Volledige inklemming	088-089	209			
Volumegewicht	075				
Voorschriften:					
- inleiding	070				
- overzicht TGB 1990	070				
Vormvastheid staafwerken		305-307			
- driehoekig stramien		310-311			
- rechthoekig stramien		312-313			
Vrij opgelegde ligger		206; 270			
<hr/>					
Waterdruk				402	
Weerstandsmoment				421; 427-428	
Werklijn		007			
Wet van Hooke		009	414	557	
Wetten van Newton:					
1 Gravitatiewet		030			
2 Bewegingswetten		031			
- wet van de traagheid		031			
- kracht = massa \times versnelling		031			
- actie = reactie		031			
3 Relatie kracht - massa		032			

Williot diagram		562-563
Windbelasting	078	
- winddruk	079	
- windzuiging	079	
- windvormfactoren	079	
Wrijving	047	
- bij een horizontaal contactvlak	047	
- bij een hellend contactvlak	048	
- wrijvingscoëfficiënt	047	
Wringing plus dwarskracht		498
WRINGSTIJFHEID		
1 Massieve profielen		
- rechthoekig profiel		488
- cirkelvormig profiel		492-493
2 Dunwandige profielen		
- enkelvoudig samenhangend		491
- meervoudig samenhangend		494-495
- - visualisatie via de membraan-analogie		496-497
Zeepvlies-analogie (wringing)		487
Zuiver buigend moment		424
Zuivere buiging		418
Zuivere druk of trek		416
Zuivere wringing		486
Zwaartelijijn		429
Zwaartepunt (rechth. blok)	038	424; 429