

Prof. ir. W.J. Beranek

KRACHTSWERKING

Deel 0

BASISKENNIS



000

KRACHTSWERKING

Deel 0

BASISKENNIS

Krachten en momenten

Evenwicht

Schematiseren

Prof. ir. W.J. Beranek

000

KRACHTSWERKING Deel 0: Basiskennis
Oktober 1999 [001-017] + [000-099] +
Trefwoordenlijst T-01 / T-08

Dit is een herziene uitgave van
KRACHTSWERKING 1 deel 1:
Augustus 1989 [001-012] + [001-031] + [040-123]

006	0	PRAKTISCHE WENKEN
	0.1	GEBRUIK VAN HET DICTAAT
	0.1.1	Doelstelling
007	0.1.2	Indeling dictaat
008	0.2	FIGUREN
	0.2.1	Aangeven van krachten
009	0.2.2	Assenkruis
010	0.3	NOMENCLATUUR
	0.3.1	Symbolen
011	0.3.2	Eenheden en dimensies
012	0.3.3	Lijst van symbolen
013		HOOFDSTUKINDELING
014	1	INLEIDING
		<i>Doel van het vak Krachtswerking</i>
	1.1	KRACHTSWERKING IN GEBOUWEN
	1.1.1	Taak van de bouwkundig ingenieur
016	1.1.2	Mechanica
	1.1.3	Krachtswerking
017	1.1.4	Constructieve vormgeving

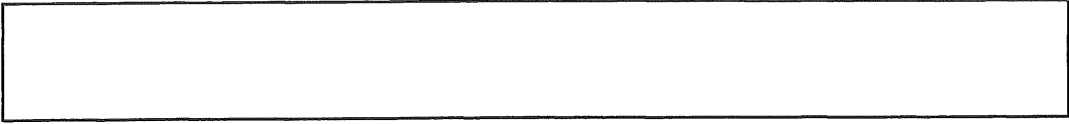
OVERZICHT VAN DE TABELLEN

070	Tabel 1	Overzicht TGB 1990
075	Tabel 2	Volumegewichten van enkele bouwmaterialen
076	Tabel 3	Veranderlijke belasting op vloeren
079	Tabel 4	Stuwdruk (wind)
096	Tabel 5	Elasticiteitsmodulus en contractie-coëfficiënt
097	Tabel 6	Lineaire uitzettings-coëfficiënt

000	2.1	BEGRIPPEN
	2.1.1	Kracht en moment
	2.1.2	Behandeling van krachten
001	2.2	BASISGROOTHEDEN
	2.2.1	Kracht
002	2.2.2	Voorbeelden kracht
004	2.2.3	Moment
	2.2.4	Koppel
005	2.2.5	Voorbeelden koppel
006	2.3	SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN <i>Alle krachten gaan door één punt</i>
	2.3.1	Overzicht
	2.3.2	Optellen van vectoren
007	2.3.3	Parallelogram van krachten
	2.3.4	Krachtendriehoek
008	2.3.5	Analytische uitwerking
009	2.3.6	Bijzondere gevallen
010	2.3.7	Resulterende kracht en evenwichtmakende kracht
011	2.3.8	Krachtenveelhoek
012	2.3.9	Het teken van krachten en momenten
013	2.4	SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN <i>De krachten gaan niet door één punt</i>
	2.4.1	Overzicht
014	2.4.2	Verplaatsen van een kracht
015	2.4.3	Het samenstellen van een kracht en een koppel
016	2.4.4	Grafisch samenstellen van krachten
017	2.4.5	Analytisch samenstellen van krachten <i>Algemeen en Stap I: Ontbinden</i>
018	2.4.6	Analytisch samenstellen van krachten <i>Stap II: Verplaatsen</i>
019	2.4.7	Analytisch samenstellen van krachten <i>Stap III: Definitief samenstellen</i>
020	2.4.8	Analytisch samenstellen van evenwijdige krachten
021	2.4.9	Evenwijdige krachten <i>Bijzondere gevallen</i>
022	2.5	ONTBINDEN VAN KRACHTEN
	2.5.1	Algemeen
	2.5.2	Ontbinden in onderling loodrechte richtingen
023	2.5.3	Ontbinden in twee gegeven willekeurige richtingen
	2.5.4	Ontbinden langs twee gegeven werklijnen evenwijdig aan de kracht
024	2.5.5	Grafisch ontbinden langs drie gegeven werklijnen
025	2.5.6	Analytisch ontbinden langs drie gegeven werklijnen

- 026 3.1 INLEIDING
 3.1.1 Evenwicht van krachten
 028 3.1.2 Bepaling krachtswerking
- 030 3.2 WETTEN VAN NEWTON
 3.2.1 Algemeen
 3.2.2 Gravitatiewet
 031 3.2.3 Bewegingswetten
 032 3.2.4 Relatie kracht - massa
- 033 3.3 FORMULERING EVENWICHTSVOORWAARDEN
 3.3.1 Algemeen
 3.3.2 Moment-vector
 034 3.3.3 Evenwichtsvoorwaarden in het platte vlak
 035 3.3.4 Krachten en momenten in de ruimte
 036 3.3.5 Evenwichtsvoorwaarden in de ruimte
 037 3.3.6 Begrip Stabiliteit
- 038 3.4 EVENWICHT VAN EEN BLOK
 3.4.1 Zwaartepunt blok
 039 3.4.2 Wijze van ondersteunen
 040 3.4.3 Starre ondersteuning
 041 3.4.4 Ondersteuning via een koord
 042 3.4.5 Stabiel en labiel evenwicht
- 044 3.5 ONDERSTEUNING IN DRIE OF MEER PUNTEN
 3.5.1 Ondersteuning in 3 punten
 046 3.5.2 Voorbeelden
 047 3.5.3 Wrijving bij een horizontaal contactvlak
 048 3.5.4 Wrijving bij een hellend contactvlak
- 049 3.6 AFDRACHT VAN HORIZONTALE BELASTINGEN
 3.6.1 Algemeen
 3.6.2 Alleen verticale belasting
 050 3.6.3 Alleen horizontale belasting
 051 3.6.4 Verticale en horizontale belasting tezamen
 052 3.6.5 Kantelen en verschuiven
 054 3.6.6 Voorbeelden afschuiven en kantelen
- 055 3.7 VERENDE ONDERSTEUNING
 3.7.1 Fundering
 056 3.7.2 Schematisering van de ondergrond
 057 3.7.3 Eigenschappen van grond
 058 3.7.4 Belastingafdracht naar de ondergrond
 059 3.7.5 Afdracht van verticale belasting
 060 3.7.6 Berekening tegendruk bij horizontale belasting
 062 3.7.7 Horizontale en verticale belasting tezamen
 063 3.7.8 Optreden van trekkrachten
 064 3.7.9 Gedeeltelijk meewerkend grondvlak
- 066 3.8 STABILITEIT
 3.8.1 Overgang van stabiel naar labiel evenwicht

068	4.1	INLEIDING
	4.1.1	Begrip schematiseren
069	4.1.2	Overzicht
070	4.2	VOORSCHRIFTEN
	4.2.1	Algemeen
071	4.2.2	Sterkte
072	4.2.3	Stijfheid
073	4.2.4	Stabiliteit
	4.2.5	Berekeningen
074	4.3	BELASTINGEN
	4.3.1	Algemeen
	4.3.2	Permanente belastingen
076	4.3.3	Veranderlijke belasting; personen en meubilair
077	4.3.4	Andere gelijkmatig verdeelde belastingen
078	4.3.5	Windbelasting
080	4.3.6	Bijzondere belastingen
081	4.3.7	Incasseringsvermogen
082	4.3.8	Opgelegde vervormingen
083	4.4	CONSTRUCTIE
	4.4.1	Algemeen
084	4.4.2	Constructie-onderdelen
086	4.4.3	Schematisering van de constructie-onderdelen
087	4.5	OPLEGGINGEN
	4.5.1	Algemeen
	4.5.2	Stalen bruggen
088	4.5.3	Ideale opleggingen ruimtelijk
089	4.5.4	Ideale opleggingen in het platte vlak
090	4.5.5	Voorbeelden opleggingen
091	4.5.6	Invoeren van ideale randvoorwaarden (ladder)
092	4.5.7	Statisch onbepaalde oplegging (ladder)
093	4.5.8	Grafische oplossing (ladder)
094	4.6	MATERIAAL
	4.6.1	Constructie-materialen
095	4.6.2	Ideaal materiaal
	4.6.3	Wet van Hooke
096	4.6.4	Vervormingen proefstaaf
097	4.6.5	Uitzettings-coëfficiënt
	4.6.6	Invloed temperatuur op de krachtswerking
098	4.7	SPANNINGEN
	4.7.1	Normaalkracht en buiging
T-01 / T-08		Trefwoordenlijst



005

0 PRAKTISCHE WENKEN

0.1 GEBRUIK VAN HET DICTAAT

0.1.1 DOELSTELLING

Het dictaat is geschreven voor zelfstudie. Er is gestreefd naar een correcte, maar zo eenvoudig mogelijke uitleg.

De theoretische beschouwingen zijn in wezen niet moeilijk. De benodigde formules worden in symbolen afgeleid. Op deze wijze is beter te voorzien welke rol de verschillende grootheden spelen, dan bij een directe numerieke aanpak.

Er zijn echter voldoende numeriek uitgewerkte voorbeelden opgenomen om te laten zien hoe een praktische berekening verloopt.

Het heeft weinig zin om veel formules uit het hoofd te leren. De paar formules die tot de parate kennis dienen te behoren, zijn in de tekst met een dun kader omrand.

Het is veel belangrijker om te leren voorzien op welke manier een probleem kan worden aangepakt. Het zal blijken dat bij geheel verschillende problemen, de aanpak in wezen toch niet verschillend is. Dikwijls valt dit de beginner in het geheel niet op. Daarom staan er vrij veel verwijzingen in het dictaat naar voorgaande onderdelen, om de overeenkomsten (en de verschillen) duidelijk te maken.

Voor de berekening van bepaalde constructietypen zijn allerlei berekeningsmethoden in omloop. We hebben alleen die methoden behandeld die ons het meest doeltreffend leken, zonder ons daarbij echter tot één methode te beperken.

Bij voorkeur moet de student van alle methoden globaal op de hoogte zijn. Voor de oplossing van een gegeven probleem kan hij echter de methode kiezen die hem persoonlijk het beste ligt.

Besef goed dat het oplossen van eenvoudige problemen door middel van een handberekening geen doel op zichzelf is, maar slechts een middel om inzicht te verkrijgen, hoe de krachten in een bouwwerk doeltreffend naar de ondergrond kunnen worden afgedragen.

De bestudering van een aantal uitgewerkte problemen in het dictaat wordt dan ook sterk aanbevolen.

Het blijkt steeds weer dat de student geneigd is de oplossing van een vraagstuk te veel als een abstract wiskundig probleem te zien. Er wordt te weinig onderkend dat het gaat om de schematisering van werkelijke constructies of werkelijke constructie-onderdelen, waarvan we in veel gevallen eigenlijk wel weten hoe deze zich ongeveer zullen gedragen. Er kan dan vrij gemakkelijk worden nagegaan of de theoretisch verkregen uitkomsten al dan niet juist zullen zijn.

In het dictaat worden een aantal verschijnselen gedemonstreerd aan de hand van eenvoudige modelletjes. Hierbij kunnen de vervormingen gemakkelijk met de hand zichtbaar worden gemaakt en sterk worden overdreven, waardoor de krachtswerking aanschouwelijk wordt gemaakt. Bij het wiskundige model en de werkelijke constructie blijft deze veelal verborgen.

Aarzel niet om ook zelf dergelijke modellen te gebruiken.

Met een lineaal op twee lucifersdoosjes kan het gedrag van een ligger al zeer overtuigend worden gedemonstreerd!

0.1.2 INDELING DICTAAT

1.4.4

Om structuur in de hoofdstukken te kunnen aanbrengen, is gebruik gemaakt van een decimale indeling. Zo'n indeling is echter weinig geschikt om te verwijzen.

052

053

Daarom zijn alle pagina's aan de bovenzijde van een duidelijk verwijfsnummer voorzien dat altijd uit drie cijfers bestaat en in een vakje is geplaatst. Het eerste cijfer komt hierbij overeen met het betreffende deel van het dictaat; hier dus deel 0.

Fig. 3

Figuren zijn voor elk tweetal tegenover elkaar liggende pagina's doorlopend genummerd. Voor elke dubbelpagina wordt met Fig. 1 begonnen.

(14)

Formules zijn per hoofdstuk doorlopend genummerd en tussen haakjes aangegeven. Elk hoofdstuk begint weer met (1).

TABEL 2

Tabellen zijn voor elk deel van het dictaat afzonderlijk doorlopend genummerd, steeds te beginnen bij 1.

{4}

Literatuurverwijzingen zijn aangegeven tussen accolades.

[052]

Bij verwijzing naar tekst, figuren, formules of tabellen die niet te vinden zijn op de twee pagina's, die ter lezing zijn opengeslagen, wordt altijd het verwijfsnummer van de betreffende pagina tussen vierkante haken [] vermeld.

[052-3]

Een cijfer achter het verwijfsnummer slaat op het betreffende figuurnummer.

[007]

Cursieve cijfers slaan op het inleidende deel.

□

Tekst waarin wat dieper op de stof is ingegaan dan nodig is bij een eerste lezing, wordt met een blokje aangegeven.

$$K = F * a \quad (1)$$

Formules die tot de parate kennis dienen te behoren, zijn met een dun kader omrand.

De basisstof is in de lettergrootte weergegeven, die ook voor deze regel is gebruikt (12 pts).

Toelichtende tekst en rekenvoorbeelden, evenals onderschriften van figuren, zijn in een kleinere lettergrootte weergegeven, zoals in dit onderdeelje (10 pts). Maar soms is ruimtegebrek de voornaamste reden.

Bij verwijzing naar de andere delen van het dictaat Krachtswerking worden de volgende afkortingen gebruikt:
KW-1, KW-2, KW-3, ...

0.2.1 AANGEVEN VAN KRACHTEN

De zwarte en witte pijlpunten bij de kracht- en momentvectoren zijn in eerste instantie bedoeld voor meer overzichtelijkheid. Er is echter gestreefd naar een zekere methodiek.

In het algemeen worden *bekende* krachten en momenten met *zwarte* pijlpunten aangegeven en *onbekende* met *witte* pijlpunten.

Bij het begin van een vraagstuk zullen de belastingen met zwarte pijlpunten zijn aangegeven en de oplegreacties met witte pijlpunten, zie fig. 1a. Zodra de numerieke of analytische waarden van de oplegreacties zijn bepaald, verschijnen deze in zwart en zijn de nog onbekende doorsnede-grootheden weer met witte pijlpunten aangegeven, zie fig. 1b.

In veel vraagstukken beschouwen we niet alleen de kracht zelf, maar ook de *ontbondenen* van de kracht. Evenzo wordt van een aantal krachten dikwijls ook de *resultante* weergegeven.

Dit betekent dat we in al deze gevallen feitelijk 'dubbel' werken.

Als we van stelsel I overgaan naar het equivalente stelsel II, zullen we de volgende regels hanteren, zie fig. 2a:

Stelsel I	→	Stelsel II
Getrokken lijnen	→	gestippelde lijnen
Zwarte pijlen	→	witte pijlen

Als een kracht echter *evenwicht* maakt met een of meerdere andere krachten, zodat de resultante van alle krachten tezamen gelijk is aan nul, dan worden alle lijnen getrokken, maar bezitten de krachten van stelsel I zwarte pijlpunten en die van stelsel II witte pijlpunten of juist omgekeerd, zie fig. 2b.

Houdt er rekening mee, dat dit stelsel niet onder alle omstandigheden kan worden gehandhaafd.

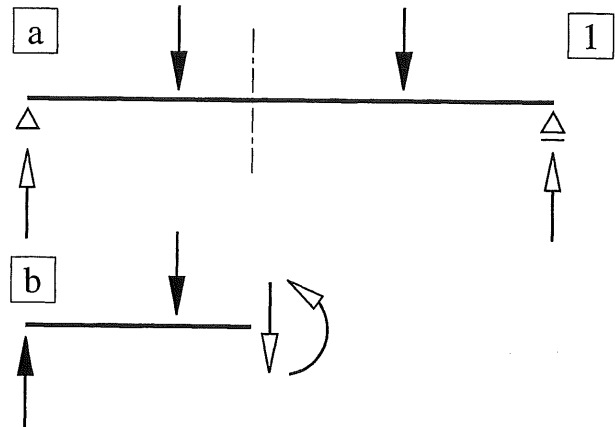


Fig. 1 Zwarte en witte pijlpunten ter onderscheiding van bekende en (vooralsnog) onbekende grootheden

- Uitwendige krachten bekend, oplegreacties onbekend
- Uitwendige krachten en oplegreacties bekend, snedekrachten onbekend

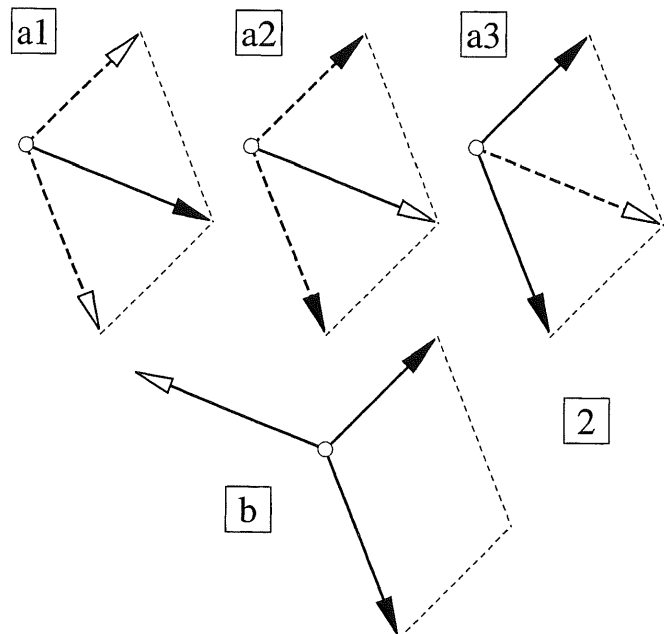


Fig. 2 Notaties bij de *resultante* van een aantal krachten en bij *evenwichtmakende* krachten

- Kracht (stelsel I), met zijn ontbondenen (stelsel II)
- Idem, variant
- Twee krachten (stelsel I), met hun resultante (stelsel II)
- Twee krachten tezamen met de evenwichtmakende kracht

0.2.2 ASSENKRUIS

In de goniometrie wordt een orthogonaal assenkruis gebruikt zoals in fig. 3 is weergegeven.

Als we dit x - y -assenkruis in een verticaal vlak plaatsen en de z -as naar voren laten wijzen, is dit een zgn. rechtsdraaiend assenkruis (voor uitleg zie [035]).

In de gegeven ligging is het uitstekend geschikt om de afmetingen van een gebouw vast te leggen, zie fig. 4. Als het hele gebouw zich in het eerste kwadrant bevindt zijn de coördinaten van elk punt positief.

Dit assenkruis mag ook in een willekeurige stand in de ruimte worden geplaatst. Zolang de onderlinge stand van de coördinaat-assen niet verandert, blijft het een rechtsdraaiend assenkruis.

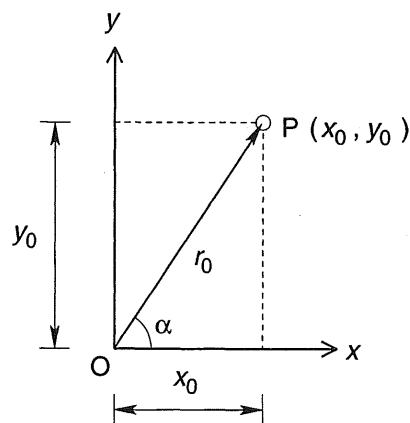
In de toegepaste mechanica zullen we van een rechtsdraaiend assenkruis gebruik maken waarbij de verticale as altijd omlaag wijst, dus in de richting van de zwaartekracht.

Meestal houdt dit het volgende in, zie fig. 5a:

- x -as naar rechts
- y -as naar voren
- z -as omlaag

Zolang we maar één plat vlak beschouwen, gaan we meestal uit van een x - y -assenkruis, onverschillig of dit op een horizontaal of een verticaal plat vlak betrekking heeft, zie fig. 5b.

Ga altijd na hoe het assenkruis voor een gegeven geval is gesitueerd.

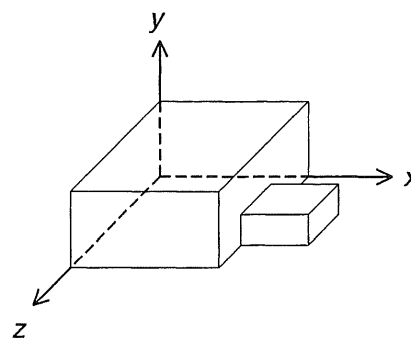


3

Fig. 3 Assenkruis voor de goniometrie

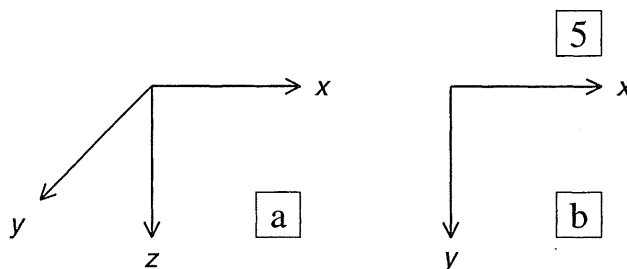
$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{r_0} \quad \cos \alpha = \frac{x_0}{r_0} \quad \text{tg } \alpha = \frac{y_0}{x_0}$$



4

Fig. 4 Driedimensionaal assenkruis voor het vastleggen van de afmetingen van een gebouw



5

Fig. 5 Rechtsdraaiend assenkruis

- a. Situering voor driedimensionale constructies in de toegepaste mechanica
- b. Gebruikelijke situering bij beschouwing van één plat vlak

0.3.1 SYMBOLEN

Veel voorkomende grootheden worden in wetenschap en techniek met bepaalde symbolen aangeduid. Hiervoor worden (cursief geschreven) Latijnse en Griekse lettertekens gebruikt. Het blijkt dat het aantal letters van het alfabet ontoereikend is om alles eenduidig te benoemen. In verschillende vakgebieden kunnen dezelfde letters daarom een geheel verschillende betekenis hebben. Veelal komt dit ook in één en hetzelfde vakgebied voor.

In het dictaat is uitgegaan van het normblad:

TGB 1990

Namen en symbolen voor grootheden

NEN 6701

Deze symbolen worden met een cursieve letter aangegeven (zie voor TGB = Technische grondslagen voor bouwconstructies: [070]).

Voorbeelden:

l = lengte

b = breedte

A = $b * h$ = oppervlak

F = kracht

σ = F / A = spanning

Bij een strikte hantering van de norm zijn ter onderscheiding in vele gevallen meerdere indices noodzakelijk. In het dictaat is het aantal indices zoveel mogelijk beperkt.

In bepaalde gevallen is ter wille van de duidelijkheid van de norm afgeweken.

Zo zou strikt genomen een oplegreactie van een ligger het symbool F voor kracht moeten krijgen. Hiervoor is echter het vacante symbool R gebruikt. (F = force; R = reaction).

In [012] is een overzicht gegeven van alle symbolen die in KW-0 zijn gebruikt.

0.3.2 EENHEDEN EN DIMENSIES

Voor analytische berekeningen kan zonder meer met de symbolen 'sec' worden gewerkt.

Voor numerieke berekeningen moeten de grootheden echter in een eenhedenstelsel worden uitgedrukt.

In de toegepaste mechanica zullen we van de volgende eenheden gebruik maken:

eenheid van lengte	mm	m	
eenheid van massa		kg	
eenheid van tijd		s	
eenheid van temperatuur		°C	
eenheid van kracht		N	kN

De eenheid van kracht is een afgeleide eenheid, één Newton (N) geeft aan een massa van één kg een versnelling van 1 m/s^2 .

In de techniek worden alleen eenheden gebruikt die een factor 1000 verschillen:

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$$

Hierbij hebben de voorvoegsels de volgende betekenis:

$$\text{m} = \text{milli} = 10^{-3}$$

$$\text{k} = \text{kilo} = 10^{+3}$$

$$\text{M} = \text{mega} = 10^{+6}$$

Zo is dus $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$. Maar de oorspronkelijke basiseenheid van 1 g is zo klein dat voor praktisch gebruik alleen de kg in aanmerking komt.

Afmetingen worden aangegeven in m en mm. Gelijkmatig verdeelde belastingen (per oppervlak) worden altijd aangegeven in kN/m^2 , (kilo-Newton per vierkante meter).

Spanningen daarentegen worden altijd aangegeven in N/mm^2 .

$$1 \text{ N/mm}^2 = 1000 \text{ kN/m}^2.$$

De term Pascal (Pa) voor druk en spanning zal in dit dictaat niet worden gebruikt, [$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ zodat $1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa}$].

De *dimensie* van een grootte geeft aan in welke eenheden de grootte kan worden uitgedrukt. Voorbeelden:

snelheid	v	m/s
versnelling	a	m/s^2
kracht	F	kN of N
oppervlak	A	m^2 of mm^2
spanning	σ	N/mm^2

De dimensie van een grootte kan ook in een meer algemene vorm worden weergegeven, waarbij de gebruikte eenheden nog even niet ter zake doen. We gebruiken hiervoor de volgende 'basis-eenheden':

$$[m] = \text{massa}$$

$$[l] = \text{lengte}$$

$$[t] = \text{tijd}$$

Aangezien we in de statica vrijwel uitsluitend met krachten werken en niet met massa's, voeren we een nieuw symbool in voor kracht: $[k]$.

Uit '*kracht = massa \times versnelling*' volgt

$$[k] = [m l t^{-2}] = \text{kracht}.$$

De dimensies van de hierboven aangehaalde voorbeelden kunnen dan als volgt in algemene vorm worden genoteerd:

$$\text{snelheid} \quad v \quad [l t^{-1}]$$

$$\text{versnelling} \quad a \quad [l t^{-2}]$$

$$\text{kracht} \quad F \quad [k]$$

$$\text{oppervlak} \quad A \quad [l^2]$$

$$\text{spanning} \quad \sigma \quad [k l^{-2}]$$

Als er onzekerheid bestaat of een gebruikte formule juist is, ga dan in ieder geval na of links en rechts van het gelijkteken dezelfde dimensies optreden.

Zorg er bij numerieke berekeningen altijd voor dat de gebruikte grootheden in dezelfde eenheden zijn uitgedrukt.

Zo zal de kracht in een staaf vrijwel altijd worden berekend in kN. Maar als hieruit de spanning in een doorsnede moet worden bepaald met behulp van de formule $\sigma = F/A$, dan zullen we de kracht eerst moeten herleiden tot N en het oppervlak in mm^2 moeten uitdrukken.

0.3.3 LIJST VAN SYMBOLEN

kleine letters

a	versnelling	$[l t^{-2}]$
a, b, c	afstanden	$[l]$
b	breedte	$[l]$
d	middellijn	$[l]$
e	excentriciteit	$[l]$
d, e, f	afstanden	$[l]$
g	versnelling zwaartekracht	$[l t^{-2}]$
h	hoogte	$[l]$
k	veerstijfheid (veerconstante)	$[k l^{-1}]$
k_s	beddingsmodulus	$[k l^{-3}]$
l	lengte, overspanning	$[l]$
m	massa	$[m]$
n	aantal	$[1]$
p	kracht per oppervlakte	$[k l^{-2}]$
q	kracht per lengte	$[k l^{-1}]$
r	straal	$[l]$
t	tijd	$[t]$
t	dikte	$[l]$
u	verplaatsing	$[l]$
v	snelheid	$[l t^{-1}]$
w	doorbuiging	$[l]$
x, y, z	lengte-coördinaten	$[l]$
z	hefboomsarm	$[l]$

Griekse lettertekens

α, β, γ	hoeken	$[1]$
α	lineaire uitzettingscoëfficiënt	$[T^{-1}]$
γ	kracht per volume	$[k l^{-3}]$
ε	rek, relatieve vervorming	$[1]$
μ	wrijvings-coëfficiënt	$[1]$
ν	contractie-coëfficiënt	$[1]$
ρ	massa per volume	$[m l^{-3}]$
σ	(normaal)spanning	$[k l^{-2}]$
τ	schuifspanning	$[k l^{-2}]$
φ	hoek	$[1]$
ϕ	rotatie	$[1]$
ψ	reductiefactor	$[1]$

HOOFDLETTERS

A	oppervlakte	$[l^2]$
C	windvormfactor	$[1]$
C	constante	$[1]$
E	elasticiteitsmodulus	$[k l^{-2}]$
F	uitwendige kracht	$[k]$
I	kwadr. oppervlaktemoment	$[l^4]$
K	uitwendig moment, koppel	$[k l]$
L	totale lengte	$[l]$
M	buigend moment	$[k l]$
N	normaalkracht	$[k]$
R	reactiekracht	$[k]$
R	kromtestraal	$[l]$
S	lineair oppervlaktemoment	$[l^3]$
S	staafkracht	$[k]$
V	volume, inhoud	$[l^3]$
V	dwarskracht	$[k]$
W	weerstandsmoment	$[l^3]$

Indices

v, V	verticaal	richting
h, H	horizontaal	
d	druk	wind
z	zuiging	
repr	representatief	belasting
mom	momentaan	
s	soil (grond)	tegendruk grond

Dimensie

Eenheid

$[m]$	massa	kg	
$[l]$	lengte	m	mm
$[t]$	tijd	s	
$[k]$	kracht	kN	N
$[T]$	temperatuur	$^{\circ}C$	

KRACHTSWERKING

Deel 0

Basiskennis

- 1 INLEIDING 014
Doel van het vak Krachtswerking
- 2 KRACHTEN 000
Krachten en momenten in het platte vlak
- 3 EVENWICHT 026
Lichamen in de ruimte en projecties op het platte vlak
- 4 SCHEMATISEREN 068
Belastingen, constructie, constructie-materialen

1 INLEIDING

Doel van het vak Krachtswerking

1.1 KRACHTSWERKING IN GEBOUWEN

1.1.1 TAAK VAN DE BOUWKUNDIG INGENIEUR

De bouwkundig ingenieur moet een aandeel kunnen leveren in het ontwerpen van gebouwen. In het dagelijks leven nemen we min of meer klakkeloos aan dat een gebouw goed in elkaar zit.

We vinden dit even vanzelfsprekend als het feit dat een mens normaliter goed in elkaar zit en moeiteloos kan functioneren.

Een mens zal tenminste zijn eigen gewicht moeten meedragen. Dat kan hij alleen maar doordat het lichaam overeind wordt gehouden door een draagconstructie: het geraamte, zie fig. 1.

Deze draagconstructie geeft de hoofdvorm aan het lichaam, maar is verder zorgvuldig weggevoerd. Hetzelfde geldt voor het installatiegedeelte van het lichaam (hart, longen, bloedvaten, spieren) dat er voor zorgt dat de mens kan leven en bewegen.

Iets overeenkomstigs geldt voor een gebouw. Ook een gebouw wordt overeind gehouden door een draagconstructie, die alleen tijdens de bouw maar goed zichtbaar is, zie fig. 2.

Tijdens de afbouw wordt de draagconstructie meestal weer zorgvuldig weggevoerd.

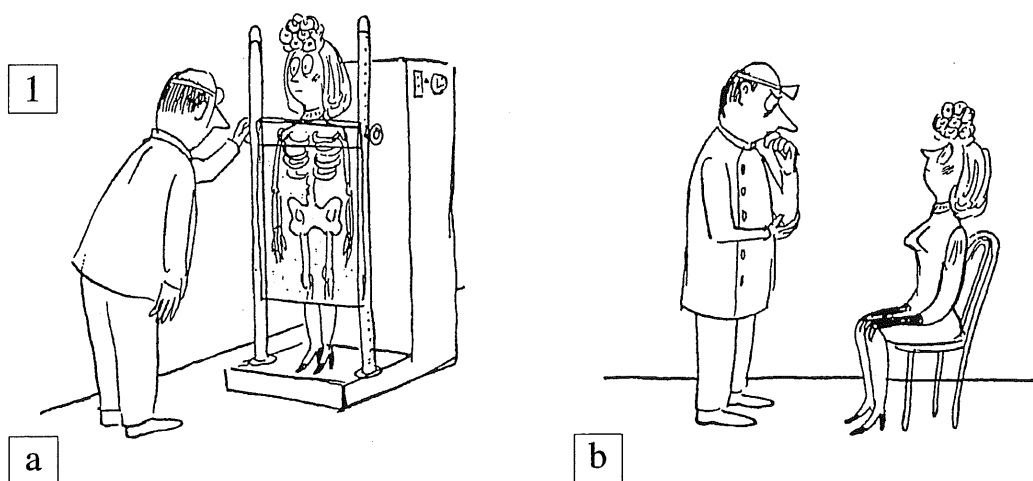
Een gebouw heeft ook een installatiegedeelte (verlichting, verwarming, water, lucht), dat onmisbaar is, maar eveneens weer zorgvuldig wordt weggevoerd.

Bij de mens zorgt de natuur er automatisch voor dat alles goed functioneert. Verder hebben alle mensen in wezen dezelfde opbouw.

Als men alle nieuwe gebouwen zou ontwerpen als copieën van reeds bestaande en goed functionerende gebouwen, zou de bouwkundig ingenieur nauwelijks reden van bestaan hebben.

Maar bij elk nieuw ontwerp treedt de mens zelf als schepper en vormgever op. Hij zal dan ook zelf na moeten gaan of zijn nieuwe schepping in staat is goed te functioneren. En dat houdt in dat hij van een groot aantal vakgebieden in hoofdtrekken op de hoogte zal moeten zijn, zie het dictaat DRAAGCONSTRUCTIES 1.

Voor het vormgeven en dimensioneren van de draagconstructie van een gebouw is kennis van de toegepaste mechanica onmisbaar. Het vak **KRACHTSWERKING IN GEBOUWEN** legt de verbindende schakel tussen de mechanica enerzijds en de constructieve vormgeving van gebouwen anderzijds.

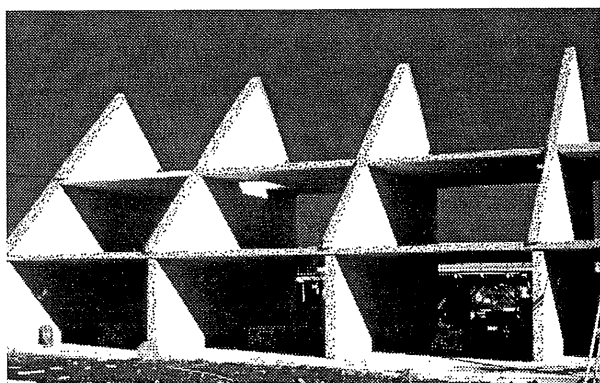


(S. Cobean)

Fig. 1 De vorm van de mens volgt uit de 'standaardvorm' van de draagconstructie

- a. De draagconstructie is alleen met bijzondere hulpmiddelen te zien
- b. In het dagelijks leven telt vooral de buitenkant

a



b

2



Fig. 2 De vorm van de draagconstructie volgt uit de gekozen vorm van het gebouw

- a. draagconstructie zichtbaar tijdens de bouw
- b. draagconstructie weggewerkt na de afbouw

1.1.2 MECHANICA

De mechanica is een onderdeel van de natuurkunde. Natuurkunde is de wetenschap die zich bezighoudt met alle verschijnselen in de natuur waarbij geen chemische reacties optreden, zoals bijv. licht, geluid, warmte. De verschijnselen worden op wiskundige wijze geformuleerd.

In de *mechanica* wordt de *beweging* van voorwerpen behandeld (meestal als lichamen aangeduid). De volgende onderdelen worden onderscheiden:

- a. De *kinematica* waarin de *geometrie* van de beweging wordt beschreven. De oorzaak van de beweging blijft hierbij buiten beschouwing.
- b. De *dynamica* waarin de *oorzaak* van de beweging wordt beschreven en de relatie wordt gelegd tussen krachten en beweging.
- c. De *statica* is een bijzonder geval van de *dynamica*; de beweging is juist gelijk aan nul.

Het zal duidelijk zijn dat voor bouwkundige toepassingen alleen de *statica* van belang is; bewegende bouwwerken zijn in het algemeen instortende bouwwerken.

De *dynamica* is in principe een theoretische wetenschap; de praktijkgerichte variant wordt aangeduid als *toegepaste mechanica*. En zoals hierboven reeds werd gesteld, is voor ons alleen maar die situatie van belang waarin alles in rust verkeert. Alle krachten die op een gebouw werken, zijn dan met elkaar in evenwicht. Hetzelfde geldt voor elk onderdeel van een gebouw.

In de toegepaste mechanica wordt een geschematiseerd beeld van de werkelijke constructie gebruikt. Allereerst wordt hieraan nagegaan op welke wijze alle uitwendige krachten (inclusief het eigen gewicht) evenwicht met elkaar kunnen maken. Vervolgens wordt onderzocht of de constructie ook sterk genoeg is om deze krachten op te kunnen nemen, zodat geen voortijdig bezwijken optreedt. Als laatste wordt nagegaan of de vervormingen niet ontoelaatbaar groot worden.

1.1.3 KRACHTSWERKING

Bij *krachtswerking* wordt onderzocht op welke wijze de krachten die op een gebouw werken, naar de ondergrond worden afgevoerd en welke invloed dit heeft op de hoofdafmetingen van de constructiedelen. Uiteraard mag geen voortijdig bezwijken optreden en moeten ontoelaatbaar grote vervormingen in het gebruiksstadium worden voorkómen. In eerste instantie zijn dat geen andere doelstellingen dan ook met de toegepaste mechanica worden beoogd.

Het wezenlijke verschil is echter, dat men zich bij de toegepaste mechanica concentreert op het aanleren van allerlei *rekentechnieken*, waarmee praktijkproblemen tot een oplossing kunnen worden gebracht.

Zowel de problemen als de daarvoor toegepaste rekenmethoden kunnen variëren van uiterst eenvoudig tot zeer ingewikkeld.

Bij *krachtswerking* staat het *inzicht* voorop en is het van minder belang op welke wijze de uitkomsten zijn verkregen. Om de basiskennis te leren beheersen zal de student een zekere oefenvaardigheid moeten opbouwen, die is gebaseerd op betrekkelijk eenvoudige berekeningen.

Ingewikkelder problemen kunnen dan worden opgelost met behulp van gebruikersvriendelijke computerprogramma's. Maar de resultaten hiervan moeten weer op hun betrouwbaarheid worden getoetst en de student zal daartoe de vaardigheid moeten bezitten.

Ter vergroting van het inzicht zullen op ruime schaal visuele hulpmiddelen worden gebruikt. Vooral het gebruik van eenvoudige 'speelmodellen' waarbij de vervormingen sterk kunnen worden overdreven, blijkt zeer verhelderend te werken. De student maakt hiermee zelf kennis in de verschillende practica **KRACHTSWERKING**. Hij zal echter geen parel uit zijn kroon verliezen als hij ook buiten de practica van dit soort modellen gebruik maakt.

1.1.4 CONSTRUCTIEVE VORMGEVING

Als het architectonisch schetsontwerp nader wordt uitgewerkt, zal het materiële ontwerp vorm en afmetingen moeten krijgen. Dit geldt zowel voor de draagconstructie als de afbouwconstructie. Vooral voor de draagconstructie is een duidelijke structuur wenselijk.

De constructeur dient bij het ontwerpen, dimensioneren en detailleren van een bouwwerk de volgende problemen onder ogen te zien {1}:

- a. Veiligheid
Bezit het gebouw een voldoende grote veiligheid tegen bezwijken?
- b. Gebruikstoestand
Is het gebouw voor het dagelijkse gebruik goed geschikt, of wordt het comfort in het gebruik (serviceability) beperkt door scheurvorming, hinderlijke doorbuigingen of trillingsgevoeligheid van het gebouw?
- c. Economie
Staat de benodigde moeite om het gebouw te vervaardigen in een reële verhouding tot het beoogde resultaat. Of kan hetzelfde resultaat wellicht met een andere (draag)constructie, sneller, economischer of eenvoudiger worden bereikt?

Speciaal voor de architect komt hier nog het volgende probleem bij:

- d. Architectuur
Kan de draagconstructie mede worden gebruikt om de architectonische verschijningsvorm te beïnvloeden en te accentueren?

{ 1 } W. Mann, 'Vorlesungen über Statik und Festigkeitslehre', Teubner Stuttgart 1986

2 KRACHTEN

Krachten en momenten in het platte vlak

2.1 BEGRIPPEN

2.1.1 KRACHT EN MOMENT

Het begrip *kracht* – en het daarvan afgeleide begrip *moment* – speelt een zeer belangrijke rol in de toegepaste mechanica. Beide zijn abstracte begrippen; het is niet mogelijk om een kracht of een moment zichtbaar te maken. Alleen aan hun *uitwerking* zijn krachten en/of momenten te herkennen. Dit kan zijn door het in beweging raken van een voorwerp of door het vervormen van het voorwerp.

Beweging is door een ieder wel te herkennen, maar de vervormingen door de krachten en momenten zijn meestal zo klein, dat ze niet worden opgemerkt. Toch zijn juist deze vervormingen essentieel om de krachten die op een gebouw of constructie werken naar de ondergrond af te voeren. Ter wille van het inzicht zullen deze vervormingen in de tekeningen en de speelmodellen dan ook sterk vergroot worden weergegeven.

2.1.2 BEHANDELING VAN KRACHTEN

In hoofdstuk 2 wordt het begrip kracht als min of meer intuïtief bekend verondersteld. Als we tegen een tafel duwen, oefenen we er een kracht op uit. We duwen in een bepaalde richting en we kunnen hard of zachtjes duwen. Het is dan voor de hand liggend om zo'n kracht door een pijl weer te geven. De richting van de pijl geeft de richting aan waarin we duwen en de grootte van de kracht kan door de lengte van de pijl worden weergegeven.

Krachten vormen de basisgrootheden van de toegepaste mechanica. In hoofdstuk 2 zullen we er een hoeveelheid 'standaardhandelingen' mee leren verrichten. Hierop wordt vroeger of later steeds weer teruggegrepen. Pas in hoofdstuk 3 zullen we op de exacte definitie van het begrip kracht ingaan, zoals die door Newton is geïntroduceerd.

2.2.1 KRACHT

Een kracht is een vector, hij bezit een grootte en een richting en wordt meestal door een pijl weergegeven, zie fig. 1. Als een kracht op een lichaam werkt, kan meestal ook het aangrijpingspunt van de kracht worden aangegeven. De lijn in het verlengde van de kracht wordt de werklijn van de kracht genoemd.

Andere voorbeelden van vectoren zijn bijv. snelheid en verplaatsing; beide grootheden bezitten zowel een grootte als een richting.

Een scalar daarentegen wordt enkel en alleen gekenmerkt door zijn grootte, bijv. temperatuur, volume.

Bij een grafische werkwijze wordt de grootte van elke kracht aangegeven door de lengte van de pijl op een bepaalde schaal te tekenen, bijv. $10 \text{ mm} \hat{=} 2 \text{ kN}$, zie fig. 2a.

($\hat{=}$ betekent: komt overeen met)

De grootte van een kracht volgt dan door deze uit de figuur op te meten.

Bij een analytische werkwijze kunnen alle krachten door een even lange pijl worden weergegeven; de numerieke waarde wordt er dan bijgeschreven, zie fig. 2b. De grootte van een nog onbekende kracht volgt dan uit de berekening.

In vele gevallen is het voldoende als we de grootte van de totale kracht en zijn werklijn kennen en behoeven we ons over het aangrijpingspunt van de kracht geen zorgen te maken. We kunnen de kracht dan langs zijn werklijn verplaatsen.

Dit verplaatsen van een kracht langs zijn werklijn is aan de volgende regels gebonden:

1. het is *wel* toelaatbaar voor het bepalen van het *evenwicht* van een lichaam waar deze krachten op aangrijpen,
2. het is *niet* toelaatbaar voor het bepalen van de *spanningsverdeling* en de *vervormingen* van het lichaam waar de krachten op aangrijpen.

Beide bovenstaande stellingen zullen in de volgende paragraaf [002–003] worden verduidelijkt aan de hand van enkele eenvoudige toepassingen uit het dagelijks leven.

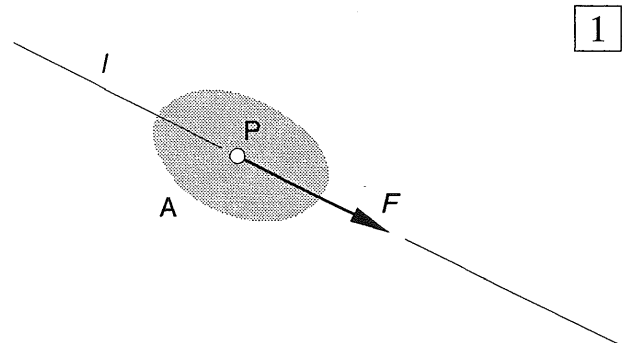


Fig. 1 Grootheden die een kracht bepalen

F = kracht (Force)

l = werklijn van de kracht (richting)

A = lichaam waarop de kracht werkt

P = aangrijpingspunt van de kracht

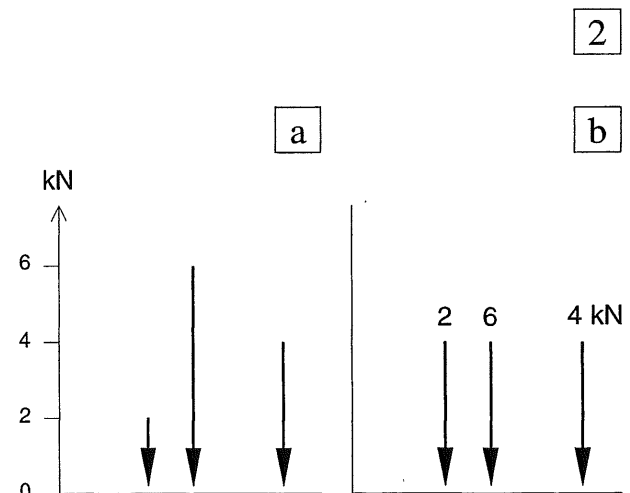


Fig. 2 Weergave van krachten

a. grafisch

b. analytisch

Over het algemeen laten we het beginpunt of het eindpunt (= pijlpunt) van de vector samenvallen met het aangrijpingspunt van de kracht. Als dit om de een of andere reden niet mogelijk is, zullen we het aangrijpingspunt met een open rondje weergeven

1

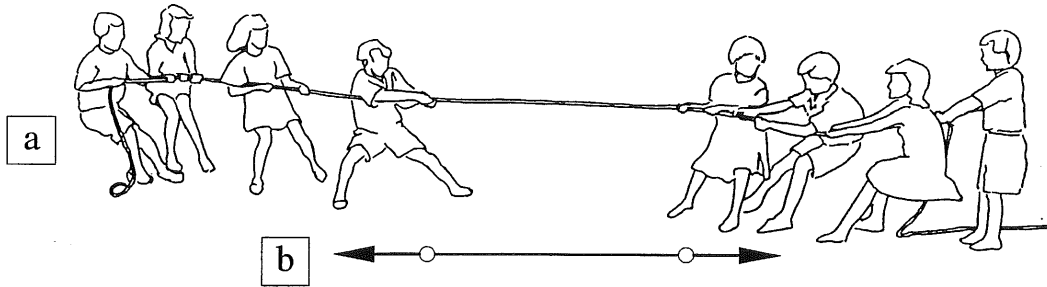


Fig. 1a Touwtrekkende kinderen
In de tekening zijn een aantal kinderen aan het touwtrekken. Elke groep kinderen levert een kracht. Aangezien de twee groepen alleen maar via het touw met elkaar in verbinding staan, moet de werklijn van de kracht met het touw samenvallen.

Fig. 1b Mechanica-schema
In het mechanica-schema is er van de oorspronkelijke tekening niet veel overgebleven. Aan de linkerzijde van het touw werkt een kracht naar links, aan de rechterzijde een kracht naar rechts. In het touw zelf werkt een trekkracht.

2

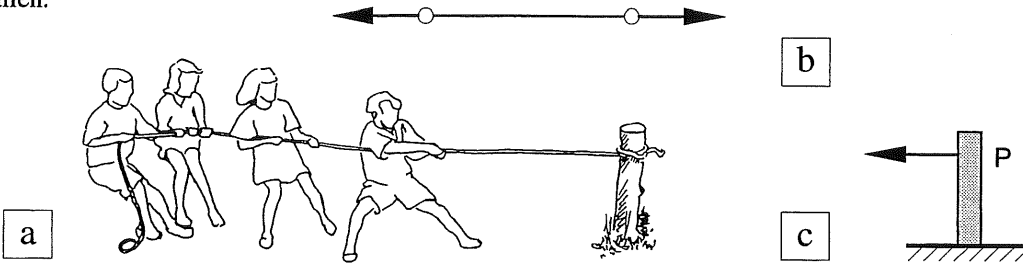


Fig. 2a Touw aan een paaltje bevestigd
Intussen is het goed te bedenken dat één groep kinderen nooit een kracht in dat touw kan veroorzaken, als we er niet voor zorgen dat die kracht ergens kan worden afgegeven. Dit kan aan de tegenpartij zijn, maar een paaltje dat stevig in de grond is geslagen, kan dezelfde functie even goed vervullen.

Fig. 2b Mechanica-schema
Het mechanica-schema is onveranderd gebleven. Het paaltje levert op 'passieve' wijze precies dezelfde kracht als de rechter groep kinderen dat voorheen op 'actieve' wijze deed.

Fig. 2c Aangrijpingspunt van de kracht
Als we de kinderen alleen als de oorzaak van de kracht beschouwen en het paaltje als het 'lichaam' waarop de kracht wordt uitgeoefend, dan is ook het aangrijpingspunt P van de kracht op het lichaam eenduidig bepaald.

3

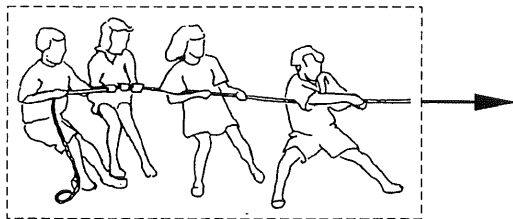


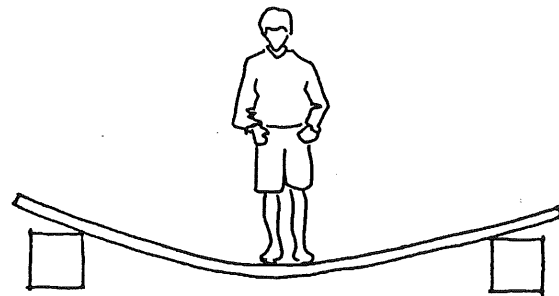
Fig. 3 Actie = reactie
Beschouwen we vervolgens elke groep kinderen in mechanica-termen ook als een 'lichaam', dan is de gezamenlijke kracht, die via het touw op de kinderen wordt uitgeoefend, nog wel te achterhalen. Dit kan bijv. gebeuren door in het touw een unster op te nemen. Dit is een meetinstrument waarbij de uitrekking van een veer de grootte van de uitgeoefende kracht weergeeft, zie fig. 4.

Het aandeel dat elk kind afzonderlijk aan de totale kracht levert is veel moeilijker na te gaan. We kunnen hier dan ook niet spreken van één aangrijpingspunt van de kracht. Die doet voor dit probleem dan ook nauwelijks ter zake.

Fig. 5 Kind op een plank

Om de invloed van een kracht op een constructie aanschouwelijk te maken, leggen we een plank op twee ondersteuning en laten een kind op de plank staan. De plank buigt hierbij flink door.

Als we de kracht zouden verplaatsen door het kind aan de plank te laten hangen, dan maakt dat voor de plank niets uit, maar voor het kind heel veel.



5

a

b

c

6

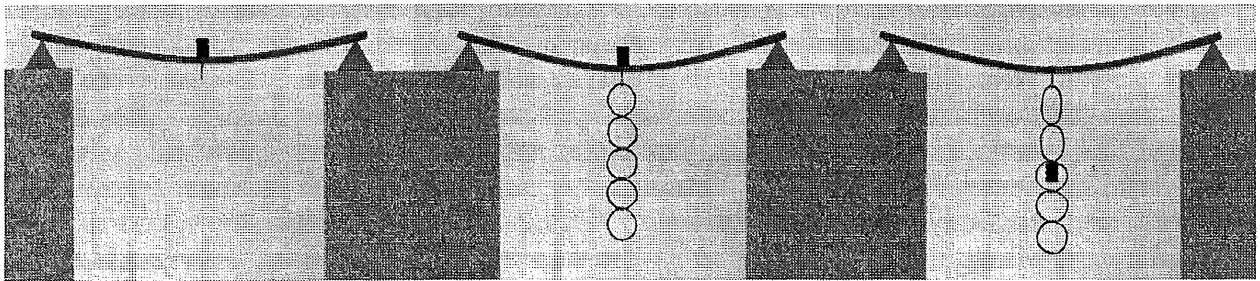


Fig. 6 Toepassing van een model

a. We kunnen hetzelfde verschijnsel als in fig. 5 wat eenvoudiger aan een modelletje demonstreren. De plank is vervangen door een liggertje van polystyreenschuim, het gewicht van het kind door een paar moeren. De vorm van de doorbuiging is onveranderd gebleven.

b. Toevoegen gummie-ringen

Met het modelletje kunnen we het tweede experiment wat gemakkelijker uitvoeren. Onder het liggertje hangen we een aantal gummie-ringen {3}. Naar boven toe worden ze wat ovaler van vorm omdat elke volgende ring ook het gewicht van de daaronder liggende ringen moet overdragen.

4

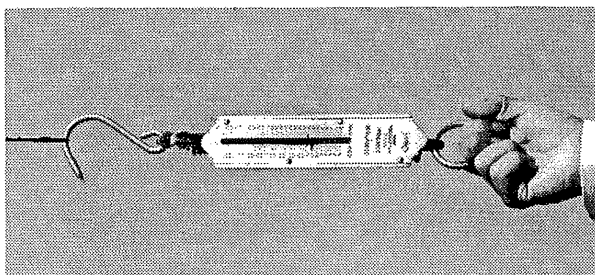


Fig. 4 Unster

Meetinstrument waarbij de uitgeoefende kracht wordt gemeten door de uitrekking van een veer.

c. Verplaatsen van een kracht

We verplaatsen nu het gewicht naar één van de gummie-ringen. Voor de ligger verandert er niets, hij buigt nog even veel door als voorheen. Maar voor de gummieringen is er veel veranderd. De ringen tussen de ligger en het aangrijpingspunt van de kracht zijn sterk uitgerekt, de ringen beneden het gewicht hangen er onveranderd bij.

We zullen nu het liggertje samen met de gummie-ringen beschouwen als een 'constructie'. Het is duidelijk dat de ligging van het aangrijpingspunt van de kracht een sterke invloed heeft op de krachtwerving en de vervormingen van deze ringen. De kracht mag dus niet zo maar langs zijn werklijn worden verplaatst.

Maar de totale kracht die tussen de gummie-ringen en het liggertje wordt overgedragen, blijft onveranderd. Dus voor de bepaling van het evenwicht (de kracht die het liggertje aan de ringen moet leveren) mag de last wèl worden verplaatst. Hetzelfde geldt voor de bepaling van de oplegreacties van het liggertje.

7

{ 3 } W.J.J. Huisman, 'Inleiding mechanica/constructief ontwerpen', TU Eindhoven, 1980

2.2.3 MOMENT

Het moment van een kracht ten opzichte van een willekeurig gekozen punt is gelijk aan het product van de kracht en de afstand van dat punt tot de werklijn van die kracht, zie fig. 1.

$$K = F * a \quad (1)$$

K = (statisch) moment

a = afstand van het willekeurig gekozen punt Q tot de werklijn l van de kracht F

Men vat de formule samen in de uitdrukking:

Moment = kracht × arm

Een moment wordt meestal weergegeven door een gebogen pijl, zie fig. 2.

Voor het teken van het moment zullen we consequent de volgende tekenafspraken aanhouden:

- rechtsdraaiend (clockwise) *positief*
- linksdraaiend (counterclockwise) *negatief*

2.2.4 KOPPEL

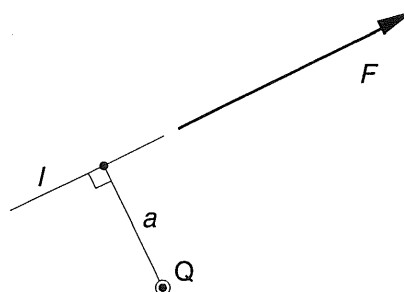
Twee evenwijdige krachten, die even groot zijn maar tegengesteld gericht, vormen tezamen een *koppel*.

Uit fig. 3 blijkt dat het statisch moment van een koppel alleen afhankelijk is van de grootte van de krachten en hun onderlinge afstand (de arm van het koppel). Het doet er kennelijk niet toe ten opzichte van welk punt het statisch moment wordt bepaald.

$$K = +F * (a + b) - F * b = F * a$$

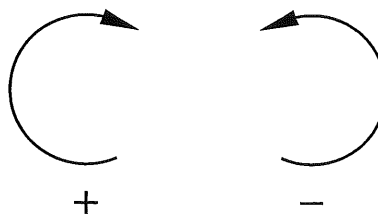
Dit betekent dat een koppel volkomen willekeurig in het platte vlak kan worden verplaatst en verdraaid, zonder dat dit enig verschil maakt voor het statisch moment ten opzichte van welk punt dan ook.

Dit slaat echter uitsluitend op het geval dat het beschouwde lichaam in rust is en ook in rust blijft, zie [005-5].



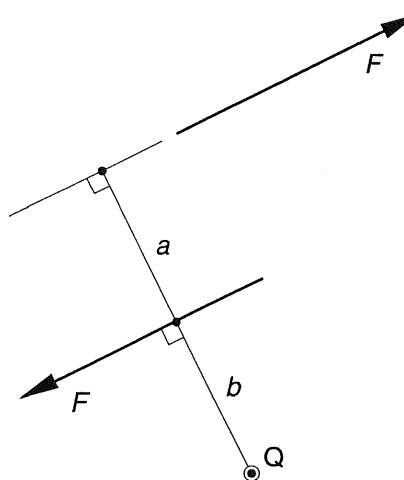
1

Fig. 1 Moment van een kracht ten opzichte van het punt Q



2

Fig. 2 Teken van het moment

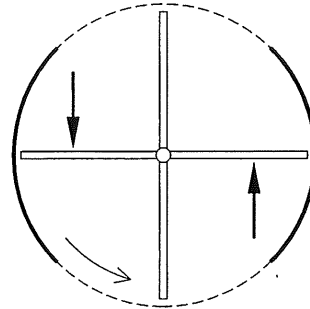


3

Fig. 3 Koppel; moment opgemaakt ten opzichte van punt Q

2.2.5 VOORBEELDEN KOPPEL

Als twee kinderen elkaar in een draaideur achterna zitten, dan vormen de krachten die ze op de deur uitoefenen tezamen een koppel, zie fig. 4. Deze krachten blijven steeds loodrecht op de deur gericht. Zolang de kinderen blijven duwen blijft de deur in beweging. Stoppen ze met duwen dan vallen de krachten van het koppel weg en zorgen wrijvingskrachten ervoor dat de deur tot stilstand komt.



4

Fig. 4 Koppel op een draaideur

Indien de krachten echter worden veroorzaakt door de werking van de zwaartekracht, dan zorgt de rotatie van het beschouwde lichaam er meestal voor dat de arm van het koppel afneemt tot nul, zodat daardoor de beweging tot stilstand komt.

We beschouwen een schilderij dat wordt opgehangen aan een haakje. Op elk onderdeel van dat schilderij werkt de zwaartekracht. Maar we interesseren ons alleen maar voor de gezamenlijke werking van al die krachtjes, die het totale gewicht van het schilderij vormen.

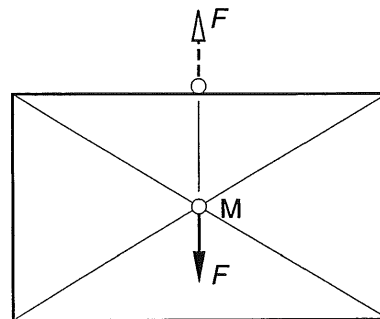
Voor de beschouwing van het evenwicht van het schilderij mogen we aannemen dat het totale gewicht aangrijpt in het middelpunt M van het schilderij, het zgn. zwaartepunt.

Allereerst nemen we aan dat het haakje precies in het midden van de bovenrand zit, zie fig. 5a. Het gewicht van het schilderij veroorzaakt een kracht F omlaag. Het haakje zorgt ervoor dat het schilderij niet omlaag kan vallen en levert aan het schilderij een kracht F omhoog. Beide krachten F zijn gelijk en tegengesteld gericht en liggen in elkaars verlengde. De arm van het koppel is dus gelijk aan nul en het schilderij zal niet roteren.

Vervolgens gaan we ervan uit dat het haakje slordig buiten het midden van de bovenrand is aangebracht, zie fig. 5b. In de gewenste horizontale stand van het schilderij grijpt het gewicht weer aan in het zwaartepunt. Het haakje zal de even grote omhoog gerichte kracht moeten leveren.

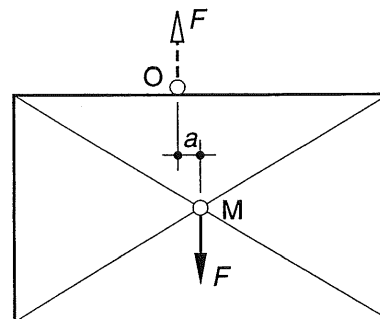
De beide krachten F zijn weer gelijk en tegengesteld gericht, maar liggen nu niet in elkaars verlengde. Er werkt een koppel $K = F * a$ op het schilderij dat een rechtsdraaiende beweging zal ondergaan.

Deze rotatie gaat door tot het zwaartepunt M van het schilderij weer onder het ophangpunt O ligt. De arm van het koppel is dan tot nul afgenomen en het schilderij bevindt zich weer in rust, zij het in een ongewenste scheve stand, zoals is weergegeven in fig. 5c.

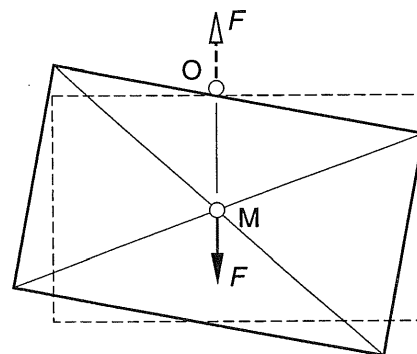


5

a



b



c

Fig. 5 Schilderij opgehangen aan een haakje
 a. haakje centrisch bevestigd
 b. haakje excentrisch bevestigd, vóór verdraaiing
 c. haakje excentrisch bevestigd, na verdraaiing

2.3.1 OVERZICHT

Voor het bepalen van de krachtswerking in constructies is het nodig om krachten te kunnen samenstellen en ontbinden. Hierbij kan zowel van grafische als van analytische methoden gebruik worden gemaakt. Meer dan eens worden deze gecombineerd. Het is van veel belang dat de student beide methoden beheerst.

In dit hoofdstuk zullen alleen krachten worden beschouwd die alle in hetzelfde platte vlak liggen. Voor veel toepassingen is dit voldoende. Eerst worden twee krachten samengesteld die door één punt gaan [007], deze procedure kan dan gemakkelijk worden uitgebreid tot meerdere krachten door hetzelfde punt [011].

Als de krachten niet door één en hetzelfde punt gaan, zullen ze eerst naar een willekeurig gekozen punt moeten worden verplaatst om daar te worden samengesteld. Dit is mogelijk door het invoeren van koppels en wordt besproken in 2.4 [013 en 016 t/m 018].

Het ontbinden van krachten in twee of meer andere krachten is de tegengestelde bewerking van het samenstellen van krachten en behoeft daarom geen bijzondere moeilijkheden op te leveren. Dit wordt besproken onder 2.5 [021].

2.3.2 OPTELLEN VAN VECTOREN

Als twee vectoren door hetzelfde punt gaan, kunnen ze vectoriëel worden opgeteld. Dit kan gebeuren met behulp van een parallellogramconstructie die voor snelheden en verplaatsingen gemakkelijk aanschouwelijk is te maken. Voor het samenstellen van krachten is dezelfde eenvoudige constructie mogelijk, de juistheid moet echter op een wat omslachtiger manier worden aangetoond [008].

Als vectoren door hetzelfde punt gaan en tegelijkertijd evenwijdig zijn, kunnen ze weer als scalaren worden behandeld. De vectoriële optelling gaat dan over in een algebraïsche optelling.

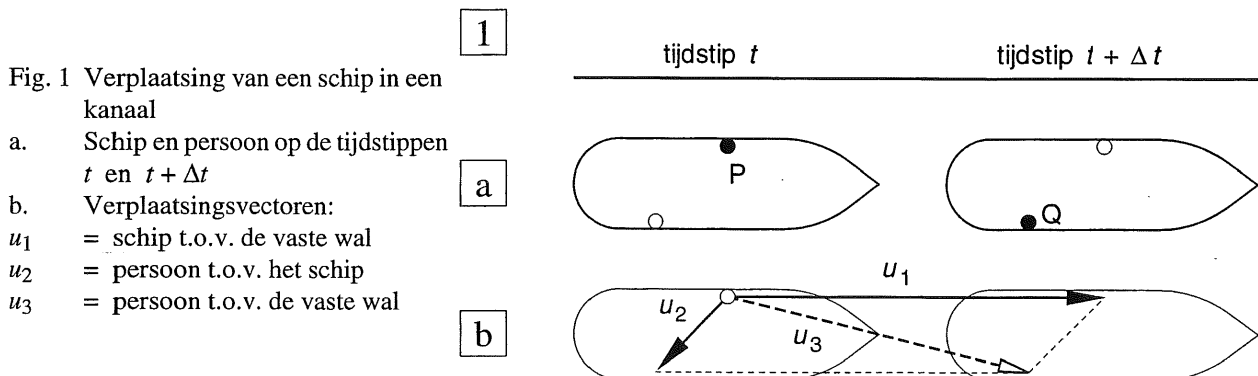
Als voorbeeld wordt uitgegaan van een schip dat in een kanaal vaart, zie fig. 1a. Binnen een bepaalde tijd Δt heeft het schip zich over een zekere afstand u_1 verplaatst.

In dezelfde tijd wandelt een persoon op dit schip vanaf punt P aan de linkerkant schuin naar achteren naar punt Q aan de rechterkant. Hij verplaatst zich hierbij over een afstand u_2 .

Om de verplaatsing van de persoon ten opzichte van de vaste wal te vinden, moeten de verplaatsingen u_1 en u_2 vectoriëel worden opgeteld.

Wanneer we vanuit punt P een parallellogram met de zijden u_1 en u_2 beschrijven, dan blijkt de gezochte verplaatsing de diagonaal u_3 van het genoemde parallellogram te zijn, zie fig. 1b.

Zou de persoon op het schip recht naar achteren zijn gelopen dan wordt het diagram als het ware 'plat geslagen' en heeft men te maken met het verschil van de afstanden u_1 en u_2 , die dan algebraïsch zijn opgeteld.



2.3.3 PARALLELOGRAM VAN KRACHTEN

Gegeven zijn twee krachten F_1 en F_2 , waarvan de werklijnen elkaar snijden in punt P, zie fig. 2a. Voor het grafisch samenstellen van deze krachten, wordt gebruik gemaakt van het parallellogram van krachten.

De krachten worden daartoe zodanig langs hun werklijnen verschoven, dat de beginpunten van beide krachten samenvallen met punt P, zoals is weergegeven in fig. 2b.

De krachten worden beschouwd als de twee aangrenzende zijden van een parallellogram, dat zonder meer kan worden getekend. De diagonaal van dit parallellogram beschrijft dan zowel de ligging van de werklijn als de grootte van de kracht F_3 . Deze kracht heeft dan dezelfde uitwerking als de beide oorspronkelijke krachten F_1 en F_2 tezamen.

Men noemt de kracht F_3 de *resultante* van de krachten F_1 en F_2 .

Omgekeerd noemt men de krachten F_1 en F_2 de *componenten* of de *ontbondenen* van de kracht F_3 in de richtingen l_1 en l_2 .

2.3.4 KRACHTENDRIEHOEK

Voor het bepalen van de resultante van twee krachten behoeft eigenlijk maar een gedeelte van het parallellogram te worden getekend.

De twee krachten worden vanuit punt P in willekeurige volgorde in richting en grootte achter elkaar uitgezet. Vervolgens verbindt men het beginpunt van de eerst getekende kracht met het eindpunt van de tweede kracht. Met behulp van deze zgn. krachtendriehoek is de *resultante* F_3 dan in grootte en richting bepaald.

Om aan te geven dat men met vectoren werkt – die zijn bepaald door een grootte en een richting – kan een streepje onder het betreffende symbool worden geplaatst:

$$\underline{F}_3 = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

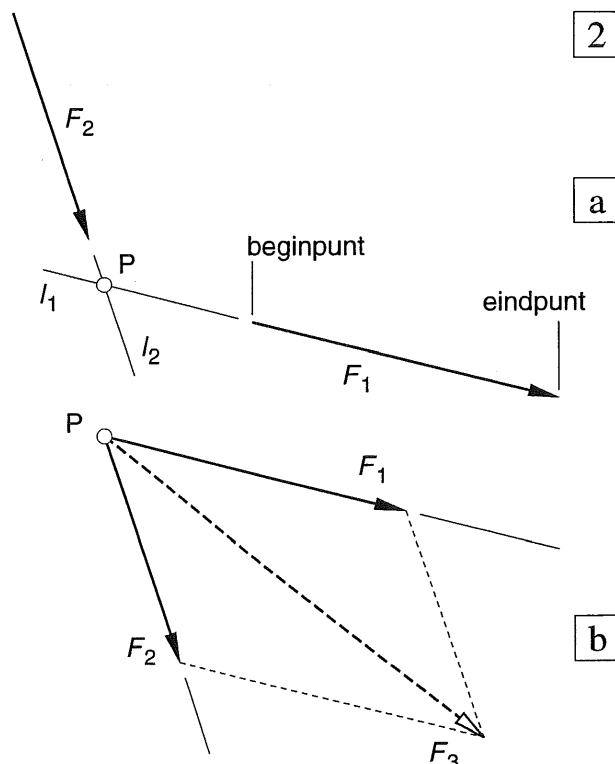


Fig. 2 Parallellogram van krachten
a. Twee krachten met hun werklijnen
b. Met de verplaatste krachten wordt het parallellogram beschreven
Het beginpunt van alle krachten ligt in P

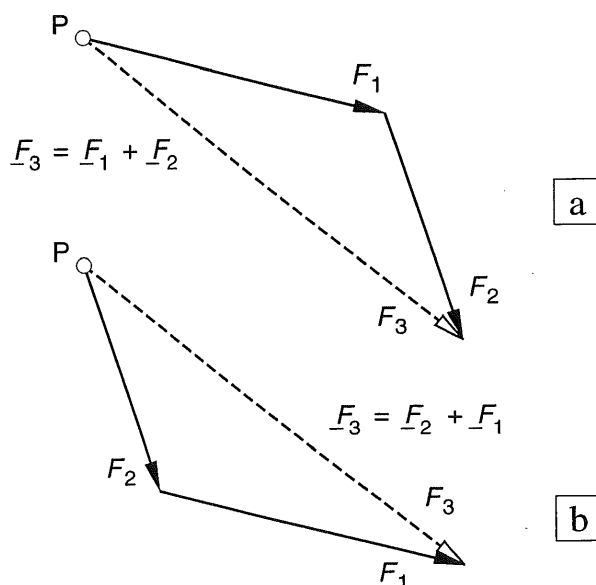


Fig. 3 Krachtendriehoek
a. vectoriëel optellen van F_1 en F_2
b. vectoriëel optellen van F_2 en F_1

2.3.5 □ ANALYTISCHE UITWERKING

Het snijpunt van de werklijnen van de krachten F_1 en F_2 wordt als oorsprong gekozen voor een rechthoekig assenkruis x - y , zie fig. 1a. De richtingen van de krachten F_1 , F_2 en F_3 worden vastgelegd door de hoeken α_1 , α_2 en α_3 . De krachten worden getekend zoals in 2.3.3 [007] is beschreven.

De kracht F_3 zal dezelfde uitwerking hebben als de krachten F_1 en F_2 tezamen, als we kunnen aantonen dat het statisch moment van F_3 gelijk is aan dat van F_1 en F_2 tezamen. Dit moment moet worden opgemaakt om drie willekeurig te kiezen punten, die niet op dezelfde rechte lijn mogen liggen. Voor een eenvoudige berekening kiezen we deze punten als volgt, zie fig. 1b.

- de oorsprong O
- een willekeurig punt Q_1 op de x -as
- een willekeurig punt Q_2 op de y -as

In fig. 1b is voor een beter overzicht alleen de kracht F_1 maar weergegeven. Bij de bepaling van het statisch moment volgen de bijdragen van F_2 en F_3 uit die voor F_1 door de indices 1 te vervangen door 2 resp. 3.

Statisch moment om O:

$$F_1 * 0 + F_2 * 0 = F_3 * 0$$

met andere woorden; F_3 moet door het snijpunt van F_1 en F_2 gaan.

Statisch moment om Q_1 (linksdraaiend):

$$-F_1 * a \sin \alpha_1 - F_2 * a \sin \alpha_2 = -F_3 * a \sin \alpha_3$$

Statisch moment om Q_2 (rechtsdraaiend):

$$+F_1 * b \cos \alpha_1 + F_2 * b \cos \alpha_2 = +F_3 * b \cos \alpha_3$$

De beide laatste voorwaarden gaan over in de volgende formules:

$$F_3 \sin \alpha_3 = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 \quad (2)$$

$$F_3 \cos \alpha_3 = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 \quad (3)$$

Formule (2) houdt in dat de som van de verticale projecties van F_1 en F_2 gelijk moet zijn aan die van F_3 . Uit formule (3) volgt hetzelfde voor de horizontale projecties. Uit fig. 1c volgt dat inderdaad aan deze voorwaarden is voldaan.

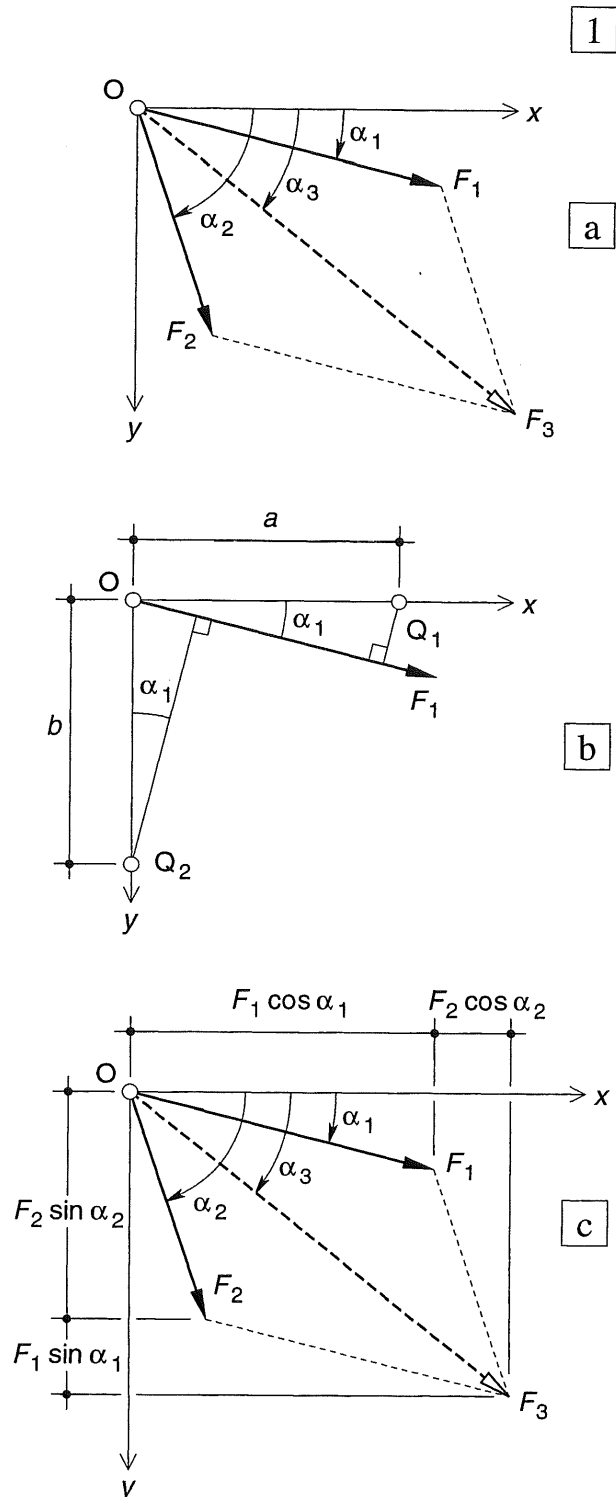


Fig. 1 Parallellogram van krachten
 a. Krachten F_1 en F_2 met hun resultante F_3
 b. Ligging van de punten O, Q_1 en Q_2
 c. Ontbondenen van F_1 en F_2 langs het x - y assenkruis

2.3.6 BIJZONDERE GEVALLEN

Als de krachten F_1 en F_2 loodrecht op elkaar staan, gelden de onderstaande betrekkingen, zie fig. 2:

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_2}{F_1}$$

Omgekeerd geldt:

$$F_1 = F_3 \cos \beta$$

$$F_2 = F_3 \sin \beta$$

Indien een aantal krachten van variërende grootte en richting moet worden samengesteld, dan is het voor een analytische behandeling aan te bevelen, om eerst alle krachten te ontbinden in hun componenten in x - en y -richting, zie fig. 3.

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \sin \alpha$$

In fig. 2 is de resultante F_3 van F_1 en F_2 bepaald. In fig. 3 heeft de kracht F dezelfde richting en grootte als de kracht F_3 . De ontbinding in loodrechte componenten heeft nu echter plaats langs een orthogonaal assenkruis waarbij de assen horizontaal en verticaal lopen.

Indien de krachten F_1 en F_2 in elkaars verlengde liggen kunnen de krachten gewoon algebraïsch worden opgeteld, zie fig. 4a.

$$F_3 = F_1 + F_2$$

Indien in een punt twee gelijke maar tegengesteld gerichte krachten aangrijpen, is de resultante gelijk aan nul; de krachten maken *evenwicht* met elkaar, zie fig. 4b.

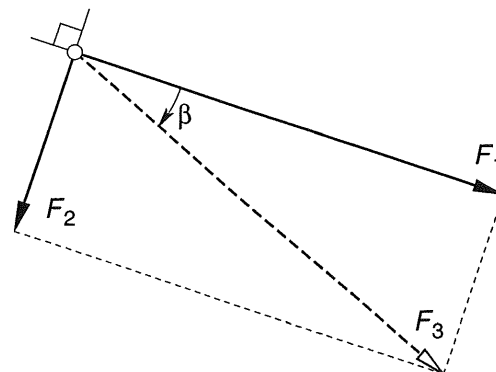


Fig. 2 Samenstellen van krachten in onderling loodrechte richtingen

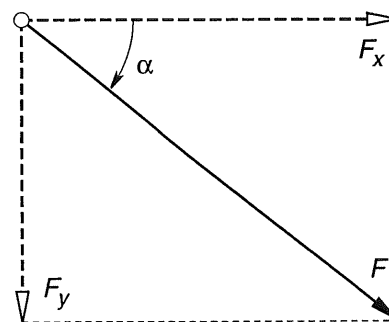


Fig. 3 Ontbinden van een kracht in onderling loodrechte richtingen

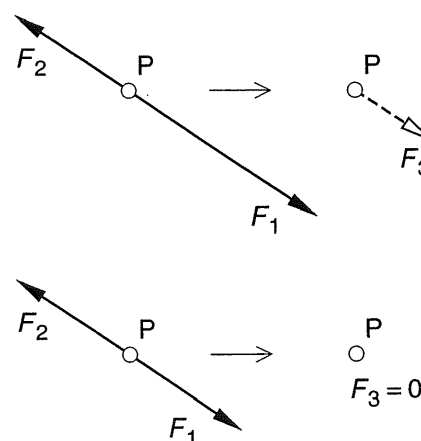


Fig. 4 Krachten in elkaars verlengde
 a. $F_3 = F_1 + F_2 = +5 - 3 = +2$ kN
 b. $F_3 = F_1 + F_2 = +3 - 3 = 0$

2.3.7 RESULTERENDE KRACHT EN EVENWICHTMAKENDE KRACHT

Resultante van twee krachten

De twee krachten worden vervangen door een derde kracht die dezelfde uitwerking heeft: de *resultante*. Deze wordt bepaald met behulp van het parallellogram van krachten, zie fig. 1a.

Voor de krachtendriehoek geldt, zie fig 1b:
De vector die de resultante van twee krachten voorstelt, loopt van het beginpunt van de eerste kracht naar het eindpunt van de tweede kracht.

Ter wille van de overzichtelijkheid zijn de krachten met zwarte en witte pijlen weergegeven [008].

Als de 'basiskrachten' met getrokken lijnen en zwarte pijlpunten zijn weergegeven, dan is de resultante met een gestippelde lijn en een witte pijlpunt weergegeven.

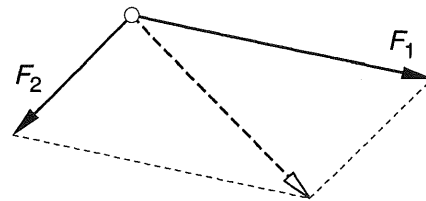
Evenwicht met twee krachten:

Aan de twee krachten wordt een derde kracht toegevoegd, die de werking van de eerste twee krachten opheft.

Deze *evenwichtmakende* kracht volgt eveneens uit het parallellogram van krachten; ze is tegengesteld gericht aan de resultante, zie fig. 2a.

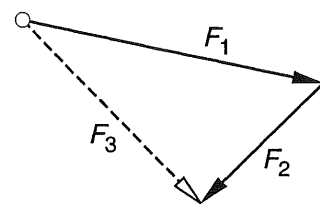
Voor de krachtendriehoek geldt, zie fig. 2b:
De vector die evenwicht maakt met twee krachten, loopt van het eindpunt van de tweede kracht naar het beginpunt van de eerste kracht. Men zegt: 'de krachtendriehoek is gesloten'.

Als de 'basiskrachten' weer met getrokken lijnen en zwarte pijlpunten worden weergegeven, dan wordt de evenwichtmakende kracht eveneens met een getrokken lijn weergegeven, maar dan wel met een witte pijlpunt.



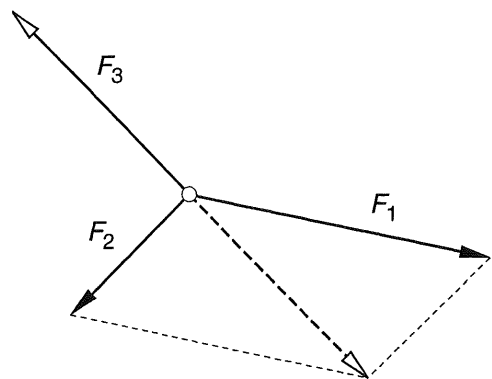
1

a



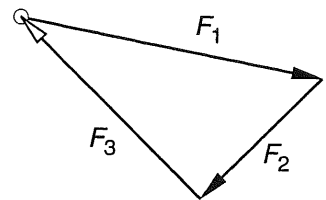
b

Fig. 1 Resultante van twee krachten
a. parallellogram van krachten
b. krachtendriehoek



2

a

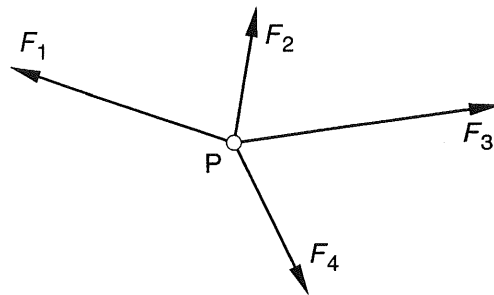


b

Fig. 2 Evenwicht met twee krachten
a. parallellogram van krachten
b. krachtendriehoek

2.3.8 KRACHTENVEELHOEK

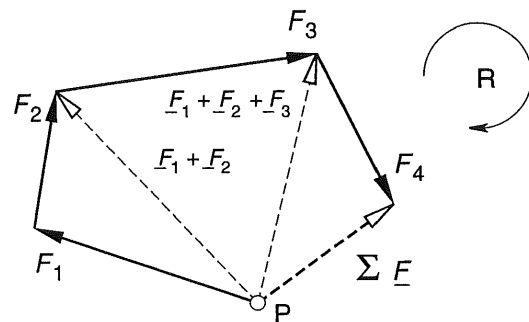
Als een aantal krachten door één punt gaat, kan de resultante worden bepaald door de krachten achter elkaar in richting en grootte uit te zetten. De volgorde is hierbij willekeurig, maar om vergissingen te vermijden, zal men de krachten bij voorkeur in een links- of rechtsdraaiende volgorde uitzetten.



3

a

In dit procédé wordt de som van de eerste twee vectoren – de resultante dus – opgeteld bij de derde vector, deze som weer bij de vierde vector enz., zie fig 3b. Deze tussenresultaten zijn gestippeld in de figuur aangegeven, blijkbaar kunnen ze net zo goed worden weggelaten.



b

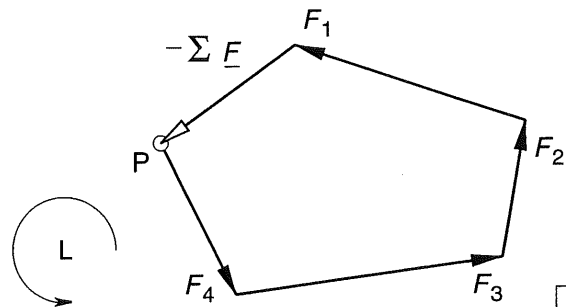
Voor het werken met een krachtenveelhoek gelden geheel overeenkomstige regels als voor een krachtendriehoek:

Resultante:

De resultante wordt gevormd door de vector, die loopt van het beginpunt van de eerste kracht naar het eindpunt van de laatste kracht (shortcut), zoals is weergegeven in fig. 3b.

Evenwicht:

Evenwicht wordt verkregen door het toevoegen van de vector, die loopt van het eindpunt van de laatste kracht naar het beginpunt van de eerste kracht; de krachten 'lopen elkaar na', zoals is weergegeven in fig. 3c.



c

Fig. 3 Krachtenveelhoek

- Vier krachten door één punt
- Bepaling van de resultante, rechtsdraaiend uitgezet, beginnend met F_1
- Bepaling van de evenwichtmakende kracht, linksdraaiend uitgezet, beginnend met F_4

Indien alle krachten evenwijdig zijn kunnen ze weer gewoon worden opgeteld.

Als men bij een aantal krachten door één punt, eerst van alle krachten de componenten in x - en y -richting bepaalt, dan volgen de componenten van de resultante dus ook door algebraïsche optelling.

2.3.9 HET TEKEN VAN KRACHTEN EN MOMENTEN

Ter recapitulatie nog enkele opmerkingen over het *teken* van krachten en momenten.

Krachten

Een kracht is positief in de richting zoals hij wordt getekend. Hij wordt negatief gerekend in de tegengestelde richting.

In fig. 1a zijn drie positieve krachten vectoriëel opgeteld. In fig. 1b is één van de drie krachten vectoriëel afgetrokken.

Bij evenwijdige krachten geldt precies hetzelfde. Een vectoriële optelling zoals in fig. 1c komt eigenlijk pas weer in KW-1 aan de orde, bij het gebruik van poolfiguur en stangenveelhoek.

Bij evenwijdige krachten is een algebraïsche optelling meer voor de hand liggend. Dan moeten wel positieve en negatieve richtingen worden afgesproken. In principe is men vrij in deze keuze, maar een eenmaal aangenomen tekenafpraak mag in de loop van een vraagstuk niet meer worden gewijzigd.

Momenten

Statische momenten en koppels zullen we positief rekenen, als ze een rechtsdraaiende beweging veroorzaken. Het blijkt dat veel studenten de draairichting in een opgave maar moeilijk kunnen traceren. Maar als in de uitwerking van een opgave ook maar één draairichting foutief is aangenomen, dan is de hele uitwerking fout.

Wellicht helpt het volgende ezelsbruggetje. In fig. 2a moet van de drie krachten het moment worden opgemaakt om punt O.

Ga als volgt te werk:

Verplaats elke kracht langs zijn werklijn, totdat er vanuit punt O een loodlijn op kan worden neergelaten, zie fig. 2b. Beschouw punt O als het middelpunt van de wijzerplaat van een klok. De loodlijn beschouwen we als een wijzer van de klok. Druk of trek aan deze wijzer in de richting van de betreffende kracht en bepaal hieruit de draairichting, zie fig. 2c.

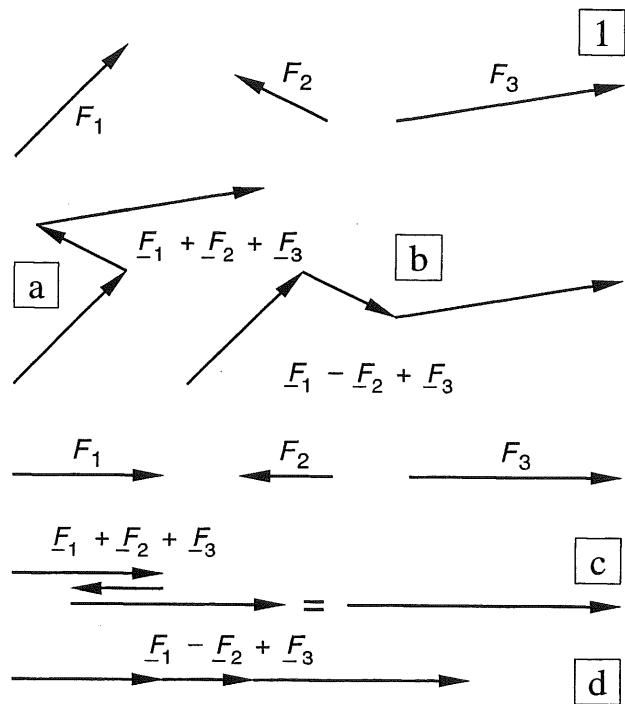


Fig. 1 Optellen en aftrekken van krachten

a, b Willekeurig gerichte krachten

a. $\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

b. $\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

c, d Evenwijdige krachten

c. $\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

d. $\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

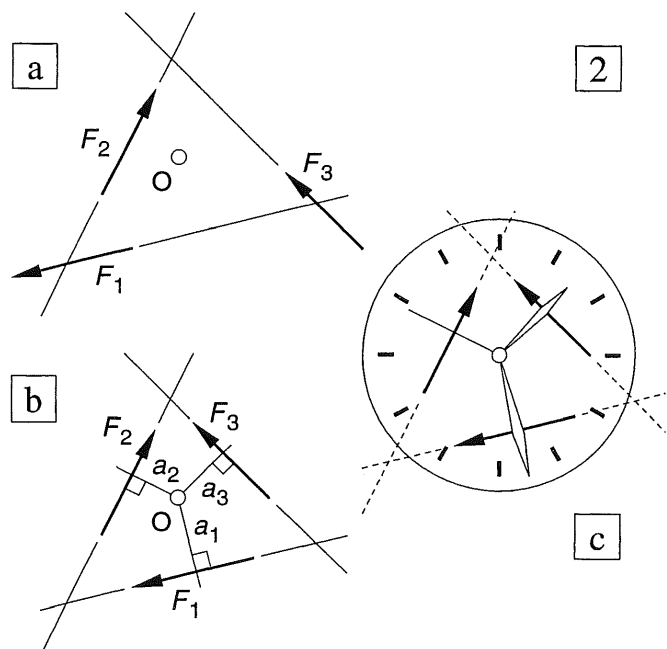


Fig. 2 Tekenen van het moment om punt O

a. Werklijnen van de krachten

b. Neerlaten van loodlijnen

c. Beschouwing van de draairichting alsof het een uurwerk betreft, dus:
 $+F_1 a_1 ; +F_2 a_2 ; -F_3 a_3$.

2.4.1 OVERZICHT

Als krachten moeten worden samengesteld die niet door één punt gaan, blijkt het noodzakelijk de krachten te verplaatsen, tot ze in principe wél door één punt gaan.

Hierbij moet worden bedacht dat dit een *fictief* verplaatsen van krachten is, om een bepaalde rekenprocedure mogelijk te maken. In werkelijkheid houden alle krachten hun zelfde aangrijpingspunt. Bij het 'verplaatsen' nemen we direct maatregelen, die ervoor zorgen dat de oorspronkelijke werking van de kracht geen enkele verandering ondergaat.

Bij een werkelijke verplaatsing van een kracht die eerst op een lichaam aangrijpt en na verplaatsing niet meer, hebben we gewoon de kracht van dat lichaam weggenomen. Dit soort verplaatsingen duiden we aan als het belasten of het ontlasten van een lichaam, en niet als het verplaatsen van een kracht.

Leggen we een boek op tafel, dan vormt dit boek een belasting voor de tafel. Halen we het boek weer weg dan is de tafel ontlast.

Het probleem kan zowel grafisch als analytisch worden opgelost.

Bij een grafische oplossing worden de krachten langs hun werklijnen verplaatst en achtereenvolgens samengesteld [016].

Bij een analytische oplossing kunnen de krachten desgewenst langs hun werklijnen worden verplaatst, maar ze zullen ook naar een punt buiten hun werklijnen moeten worden overgebracht [017 t/m 019].

Bij evenwijdige krachten is alleen de analytische oplossing volgens [020] te gebruiken en niet de grafische volgens [016].

Maar bij evenwijdige of min of meer evenwijdige krachten kan wel met vrucht van een andere grafische methode gebruik worden gemaakt: de constructie met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek, die wordt beschreven in KW-1.

2.4.2 VERPLAATSEN VAN EEN KRACHT

Bij het bepalen van het *evenwicht* van een lichaam, gelden de volgende regels voor het verplaatsen van krachten:

- een kracht mag altijd langs zijn werklijn worden verplaatst,
- een kracht mag evenwijdig aan zichzelf worden verplaatst naar een punt buiten zijn werklijn door het invoeren van een koppel.

Een van de belangrijkste handelingen in de toegepaste mechanica is het verplaatsen van een kracht evenwijdig aan zichzelf naar een punt buiten zijn werklijn, zonder dat daarbij het effect van de kracht enige wijziging ondergaat.

Gegeven zijn de kracht F_1 , zijn aangrijpingspunt P en het punt Q waarheen F_1 moet worden verplaatst, zie fig. 1a.

Als eerste stap brengen we in Q een nieuwe kracht F_1 aan (met witte pijl), gelijk en evenwijdig aan de oorspronkelijke kracht, zie fig. 1b. Hierdoor is de toestand dus gewijzigd.

Om deze wijziging te compenseren wordt vervolgens in Q een tweede kracht F_1 aangebracht (met zwarte pijl) die tegengesteld is gericht, zie fig. 1c. Hierdoor wordt de oorspronkelijke toestand weer hersteld, aangezien de beide krachten F_1 in punt Q elkaar opheffen.

De volgende stap is een wat andere interpretatie van de werking van de drie krachten F_1 zoals die zijn weergegeven in fig. 1c.

De kracht F_1 met de witte pijl wordt nu beschouwd als de verplaatste kracht F_1 , terwijl de twee andere krachten F_1 , beide met een zwarte pijl aangegeven, tezamen een koppel vormen ter grootte:

$$K = F_1 * a$$

Dit nieuw ingevoerde koppel heeft kennelijk dezelfde grootte en draairichting als dat van de oorspronkelijke kracht F_1 ten opzichte van Q.

In fig. 1d is dit koppel op de gebruikelijke wijze weergegeven door een gebogen pijl.

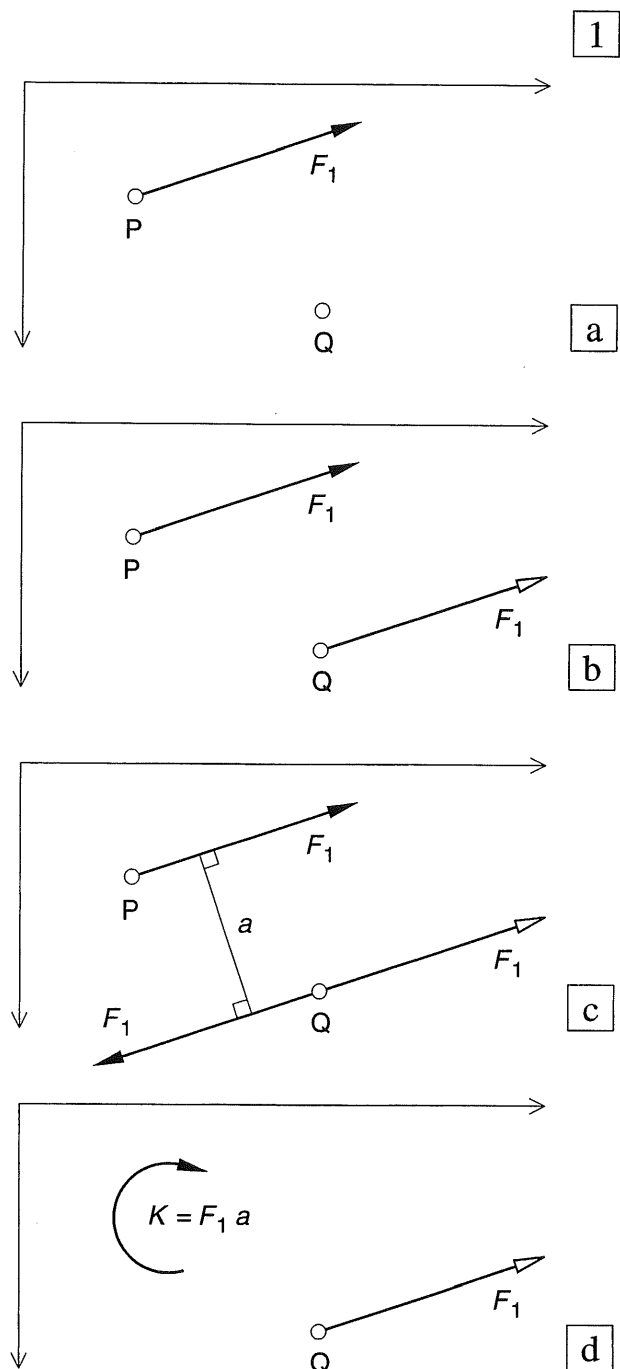


Fig. 1 Het verplaatsen van een kracht naar een punt buiten zijn werklijn

- a. Oorspronkelijke kracht
- b. Toevoegen van een nieuwe kracht
- c. Het compenseren van de nieuwe kracht
- d. Vervanging van twee van de drie krachten door een koppel

2.4.3 HET SAMENSTELLEN VAN EEN KRACHT EN EEN KOPPEL

Het samenstellen van een kracht en een koppel tot één kracht is de omgekeerde bewerking van het procédé dat in [014] is gegeven.

Gegeven zijn een kracht F_1 en een koppel K , zie fig. 2a.

Er wordt gevraagd om beide grootheden door één resulterende kracht te vervangen, uiteraard weer zonder dat de oorspronkelijke werking verloren gaat, zie fig. 2a.

Zoals bekend, mag een koppel willekeurig in het platte vlak worden verdraaid en verschoven en is alleen de grootte van het *product*: kracht \times arm van belang. Ter illustratie is in fig. 2b een drietal koppels weergegeven, die allemaal dezelfde grootte en draairichting bezitten.

Voor de oplossing van het vraagstuk wordt het koppel K vervangen door twee evenwijdige en tegengestelde gerichte krachten die dezelfde grootte bezitten als de gegeven kracht F_1 . De draairichting en de arm van het koppel worden zodanig gekozen dat geldt $K = F_1 \cdot a_1$. Hieruit volgt:

$$a_1 = \frac{K}{F_1} \quad (4)$$

Dit koppel wordt nu zodanig in het platte vlak verschoven en verdraaid totdat één van beide krachten van het koppel ook in punt R aangrijpt en juist evenwicht maakt met de oorspronkelijke kracht F_1 (met de witte pijl), zie fig. 2c.

De beide krachten F_1 in punt R heffen elkaar dan op en de andere kracht van het koppel stelt de gezochte resultante voor, op een afstand a_1 vanaf punt R gelegen, zie fig. 2d.

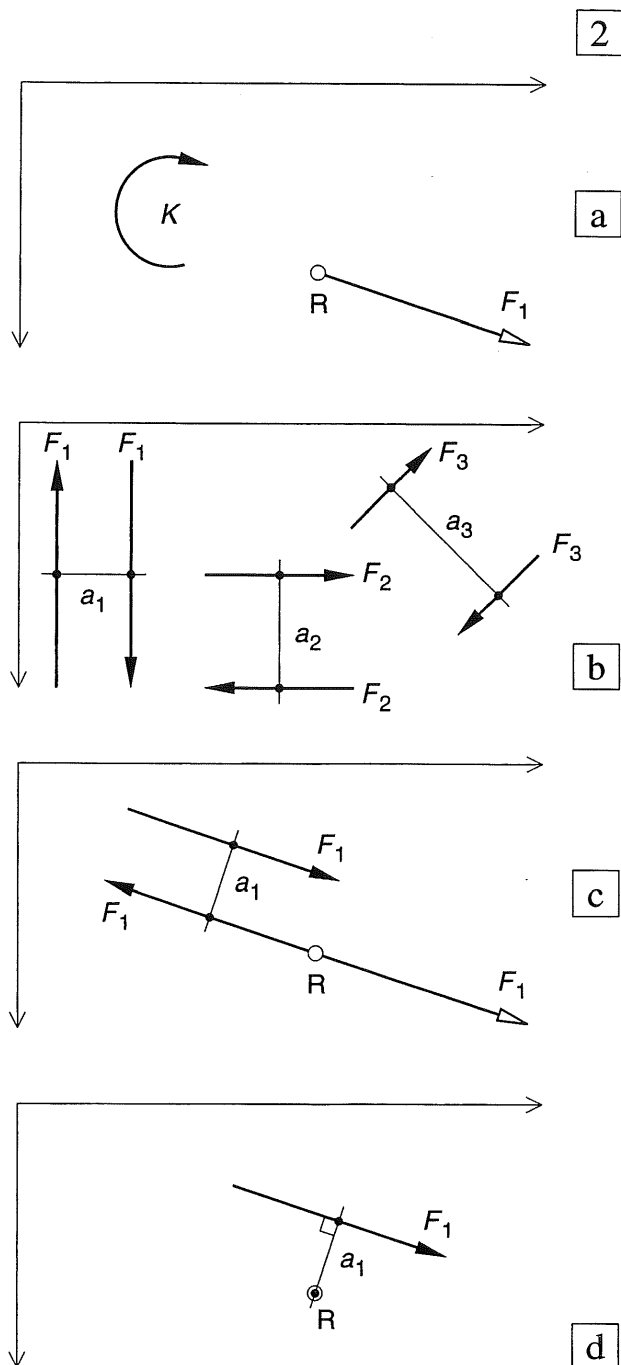


Fig. 2 Samenstellen van een kracht en een koppel
 a. Oorspronkelijke kracht en koppel
 b. Drie koppels met dezelfde grootte:
 $K = F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2 = F_3 \cdot a_3$
 c. Koppel $F_1 \cdot a_1$ zodanig verdraaid en verschoven dat de oorspronkelijke kracht F_1 wordt gecompenseerd
 d. Ligging van de resultante

2.4.4 GRAFISCH SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN

Bij het grafisch samenstellen van krachten wordt van twee willekeurige krachten de resultante bepaald. Deze resultante wordt weer samengesteld met een derde kracht tot een nieuwe resultante. Het procédé gaat door tot alle krachten aan de beurt zijn geweest.

De werkwijze wordt toegelicht aan de hand van fig. 1, waar drie krachten met hun werklijnen zijn gegeven, die moeten worden samengesteld tot één resulterende kracht.

De oplossing verloopt als volgt:

Voor de twee willekeurige krachten zijn F_1 en F_2 gekozen. Beide krachten worden langs hun werklijnen verplaatst tot ze aangrijpen in het snijpunt P van deze werklijnen, zie fig. 2.

Van deze twee krachten bepalen we de resultante F_4 met behulp van het parallellogram van krachten [007-2]. Vervolgens worden de krachten F_4 en F_3 elk langs hun werklijn verplaatst, tot ze aangrijpen in het snijpunt Q van deze werklijnen. De resultante van F_3 en F_4 kan dan weer op geheel overeenkomstige wijze worden bepaald.

NB: Gebruik bij deze werkwijze *altijd het parallellogram van krachten* en geen krachten-driehoek; dit laatste leidt snel tot vergissingen. Toepassing van een *krachtenveelhoek* heeft wel zin als *controlemiddel*, zie fig. 3.

Buiten de tekening kan dan worden nagegaan of – na alle opeenvolgende samenstellingen van twee krachten met de bijbehorende verschuivingen – de resultante nog wel de juiste grootte en richting bezit. De ligging van de werklijn van de resultante is zo natuurlijk niet te controleren.

Bij meer dan drie krachten kunnen we op dezelfde wijze doorgaan. Indien het aantal krachten niet te groot is, is dit de snelste en meest overzichtelijke manier. Bij een groot aantal krachten kan het resultaat echter onoverzichtelijk worden. Gebruik dan poolfiguur en stangenveelhoek [KW-1] of ga analytisch te werk.

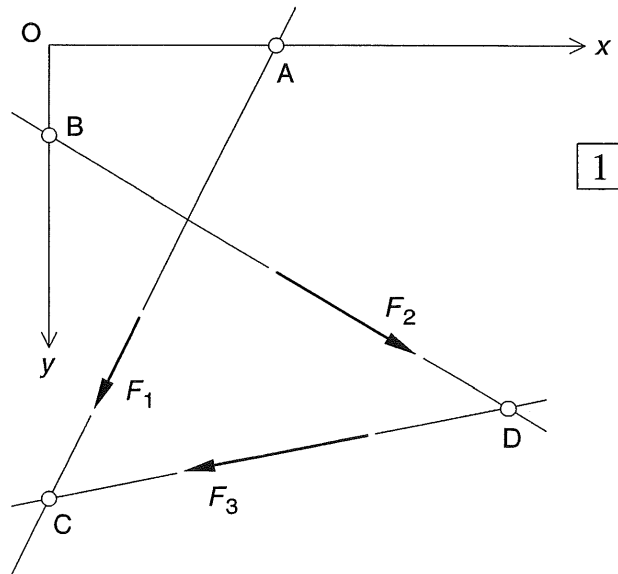


Fig. 1 Drie krachten met hun werklijnen

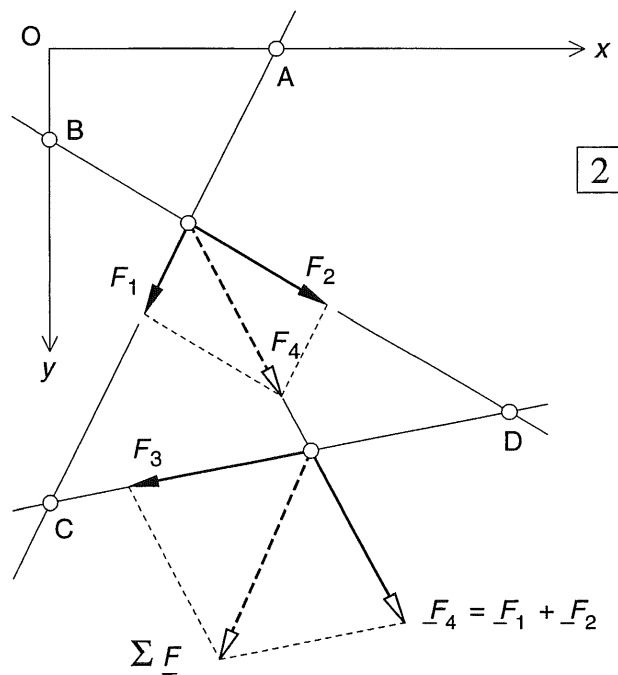


Fig. 2 Grafisch samenstellen van de krachten

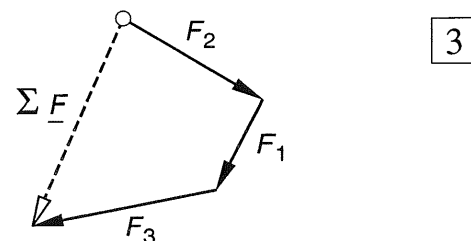


Fig. 3 Controle van de grootte en de richting van de resultante met behulp van een krachtenveelhoek

2.4.5 ANALYTISCH SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN ALGEMEEN

Het analytisch samenstellen van willekeurig gerichte krachten gebeurt in drie stappen:

- I Alle krachten worden ontbonden in de x - en y -richting [009-3].
- II De ontbondenen worden verplaatst naar één punt onder invoering van de benodigde koppels [014-1].
De krachten worden samengesteld tot een resulterende kracht [011] en de koppels tot een resulterend koppel [033-2a].
- III De resulterende kracht en het resulterend koppel worden weer vervangen door één equivalente kracht [015-2]

Het analytisch samenstellen van willekeurig gerichte krachten is ter wille van de volledigheid behandeld. Om vergissingen te vermijden zal men zeer zorgvuldig te werk moeten gaan. Bij evenwijdige krachten is het echter een zeer gebruikelijke werkwijze [020-021].

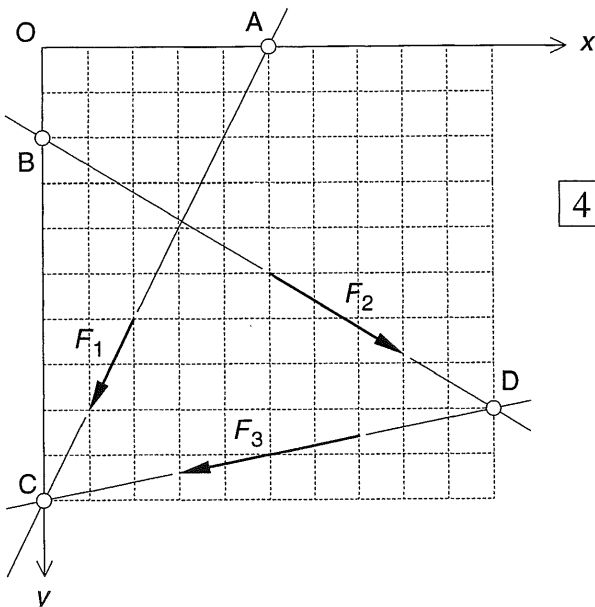


Fig. 4 Drie krachten in plattegrond met ruitennet
De ruiten hebben afmetingen van $1\text{ m} \times 1\text{ m}$.
Hetzelfde ruitennet is ook gebruikt om de grootte van de krachten weer te geven.

In dit geval geldt: $1\text{ m} \hat{=} 1\text{ kN}$

STAP I: ONTBINDEN

De werkwijze voor het analytisch samenstellen van krachten zal worden uiteengezet aan de hand van hetzelfde voorbeeld dat in [016] grafisch is uitgewerkt, zie fig. 1.

Als eerste stap worden alle krachten ontbonden in hun componenten in x - en y -richting volgens [009-3]. Voor een beter overzicht is de plattegrond daartoe voorzien van een assenkruis met een ruitennet (vergelijk fig. 4 met fig. 1).

Uit fig. 4 zijn dan gemakkelijk de volgende waarden af te lezen ($\text{tg } \alpha = F_y / F_x$):

	$\text{tg } \alpha$	F_x	F_y	
F_1	-2,0	-1,0	+2,0	
F_2	+0,6	+3,0	+1,8	
F_3	-0,2	-4,0	+0,8	
ΣF		-2,0	+4,6	kN

De grootte van de resultante kan worden bepaald met behulp van de stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \\ &= \sqrt{2,0^2 + 4,6^2} = 5,02\text{ kN} \end{aligned}$$

In principe kunnen de drie krachten in elk punt van hun werklijn worden ontbonden, dus ook op de plaats waar ze in fig. 4 staan getekend.

De berekening wordt echter vereenvoudigd als de krachten F_1 , F_2 en F_3 eerst langs hun werklijnen worden verplaatst tot ze één van de coördinaat-assen snijden en daar pas in x - en y -richting worden ontbonden. Hiertoe zijn op het volgende blad [018] de krachten als volgt verschoven:

- F_1 naar punt A,
- F_2 naar punt B,
- F_3 naar punt C.

2.4.6 ANALYTISCH SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN
 STAP II: VERPLAATSEN

De componenten in x - en y -richting van de verplaatste krachten F_1 , F_2 en F_3 volgens [017], zijn met hun numerieke waarden weergegeven in fig. 1.

Alle componenten moeten vervolgens worden verplaatst naar een willekeurig te kiezen punt, waarvoor hier de oorsprong O van het assenkruis is gekozen, zie fig. 1 en 2a.

De componenten in x - en y -richting van de resulterende kracht bedragen:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= +F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \\ &= -1,0 + 3,0 - 4,0 = -2,0 \text{ kN} \\ \Sigma F_y &= +F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \\ &= +2,0 + 1,8 + 0,8 = +4,6 \text{ kN} \end{aligned}$$

Bij dit verplaatsen moeten een aantal koppels worden ingevoerd volgens [014]. Dit verloopt gemakkelijk omdat één van de componenten van de kracht steeds door de oorsprong gaat en dus geen bijdrage aan het koppel kan leveren.

Strikt genomen geldt:

$$\Sigma K = -\Sigma F_{xi} * y_i + \Sigma F_{yi} * x_i \quad (5)$$

Een positieve kracht in x -richting op een positieve afstand in y -richting levert immers een negatief statisch moment om punt O ; dus een negatieve bijdrage aan het koppel, zie fig. 2b.

Maar een positieve kracht in y -richting op een positieve afstand in x -richting levert een positief statisch moment om O ; dus een positieve bijdrage aan het koppel.

Het is echter ten sterkste aan te raden om de tekens van de krachten en afstanden maar te 'vergeten' en alleen een teken toe te kennen aan de draairichting van de koppels, zoals bij de numerieke uitwerking hiernaast is aangegeven.

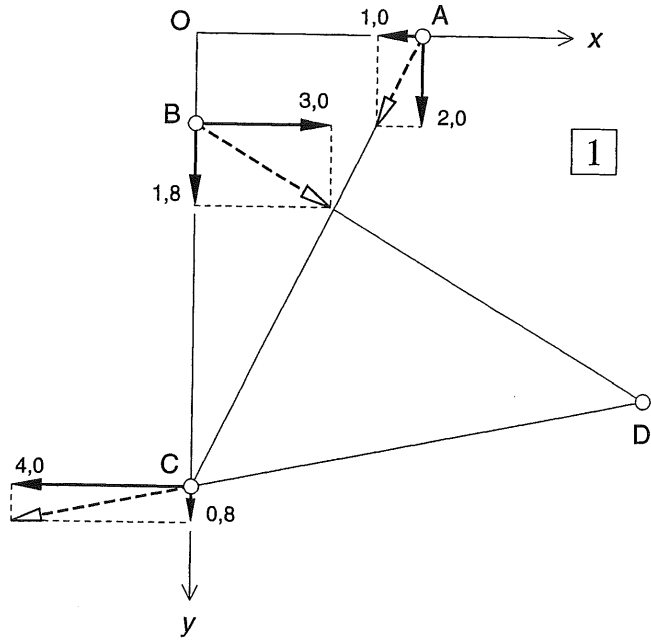


Fig. 1 Ontbondenen van de verplaatste krachten

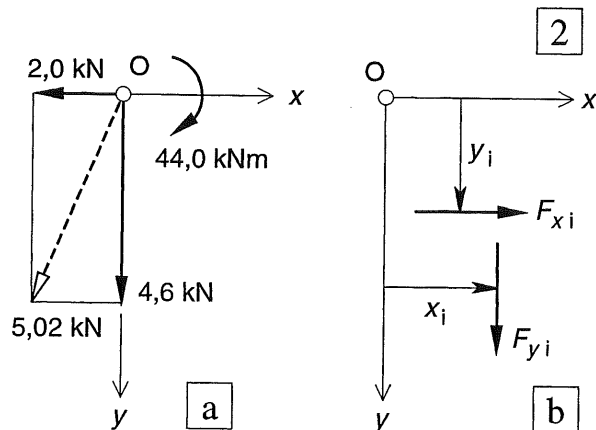


Fig. 2 Verplaatsen van de krachten naar de oorsprong
 a. Uiteindelijke kracht en koppel in punt O
 b. Bijdrage van de krachten in x - en y -richting aan het statisch moment om punt O

Ter wille van de volledigheid zijn in de onderstaande berekening van het resulterend koppel alle grootheden opgenomen, ook als de arm van het betreffende koppel gelijk is aan nul.

$\Sigma K =$	$\Sigma K =$
$-F_{1x} * y_1 + F_{1y} * x_1$	$+ 1,0 * 0 + 2,0 * 5$
$-F_{2x} * y_2 + F_{2y} * x_2$	$- 3,0 * 2 + 1,8 * 0$
$-F_{3x} * y_3 + F_{3y} * x_3$	$+ 4,0 * 10 + 0,8 * 0$
$\Sigma K = 0 + 10 - 6 + 0 + 40 + 0 = +44,0 \text{ kNm}$	

2.4.7 ANALYTISCH SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN STAP III: DEFINITIEF SAMENSTELLEN

In punt O kennen we nu de grootte en richting van de resulterende kracht ΣF en van het resulterend koppel ΣK , zie fig. 2a.

De kracht en het koppel kunnen dan worden samengesteld tot één kracht ΣF , gelegen op een afstand a vanuit de oorsprong O, die volgt uit formule [015 - (4)] :

$$a = \Sigma K / \Sigma F \quad (4a)$$

Numerieke uitwerking, zie fig. 3:

$$a = 44,0 / 5,02 = 8,77 \text{ m}$$

Het koppel ΣK is rechtsdraaiend, de schuin omlaag gerichte kracht ΣF moet dus ten opzichte van O een rechtsdraaiend koppel leveren. De werklijn moet dan rechts van O liggen. De afstand a staat loodrecht op de richting van de kracht ΣF en maakt dus een hoek met de x -as waarvoor geldt:

$$\text{tg } \beta = \Sigma F_x / \Sigma F_y = 2,0 / 4,6 = 0,435$$

□ Variant

Het is ook mogelijk om consequent met de afzonderlijke componenten ΣF_x en ΣF_y van de resulterende kracht te blijven werken.

We bepalen dan het koppel ΣK_x dat nodig is om alle componenten in x -richting naar O te verplaatsen en berekenen vervolgens op welke afstand van O de component ΣF_x moet liggen.

We herhalen deze handelingen voor de krachten in y -richting.

Voor de x -richting geldt, zie fig. 4 en [018] rechtsonder $\Sigma K_x = -6,0 + 40,0 = +34,0 \text{ kNm}$ (rechtsdraaiend)
 $\Sigma F_x = -2,0 \text{ kN}$ (naar links gericht).

Uit formule (5) [018] volgt:

$$y_0 = \Sigma K_x / -\Sigma F_x = 34,0 / 2,0 = +17,0 \text{ m}$$

Voor de y -richting geldt:

$$\Sigma K_y = +10,0 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_y = +4,6 \text{ kN}$$

$$x_0 = \Sigma K_y / +\Sigma F_y = 10,0 / 4,6 = 2,17 \text{ m}$$

Op deze wijze vinden we de werklijnen voor de componenten in x - en y -richting. Het snijpunt S van deze werklijnen levert dan een punt van de werklijn van de resulterende kracht, waarvan dan ook de richting bekend is, zie fig. 4.

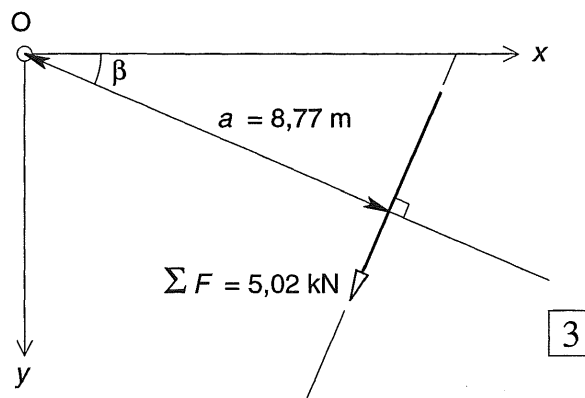


Fig. 3 Ligging van de resultante

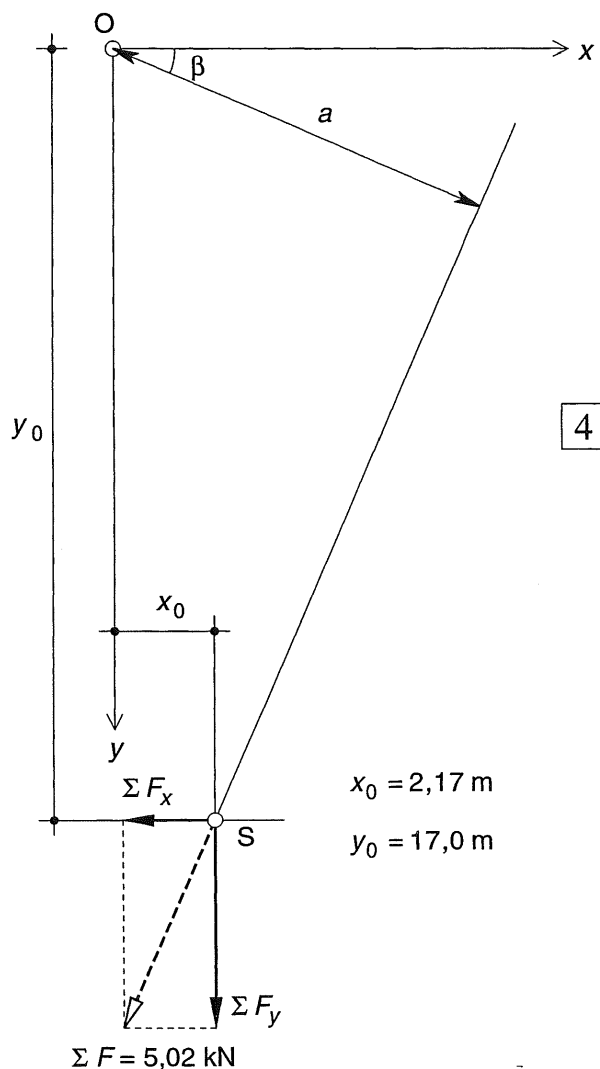


Fig. 4 Bepaling van het punt S van de werklijn van de resultante, dat volgt door de krachten in x - en y -richting elk afzonderlijk te beschouwen

2.4.8 ANALYTISCH SAMENSTELLEN VAN EVENWIJDIGE KRACHTEN

Uit de voorgaande beschouwingen volgt dat de resultante van een aantal evenwijdige krachten altijd gelijk is aan de algebraïsche som van deze krachten:

$$\sum \underline{F} = \sum F$$

Hierbij is de resultante uiteraard evenwijdig aan de oorspronkelijke krachten.

De werklijn van de resultante kan worden bepaald door het statisch moment van de gegeven krachten – ten opzichte van een willekeurig gekozen punt Q – gelijk te stellen aan het statisch moment van deze resultante.

$$\begin{aligned} F_1 * a_1 + F_2 * a_2 + F_3 * a_3 + \dots &= \\ &= (F_1 + F_2 + F_3 + \dots) * x_0 \end{aligned}$$

ofwel in gecompriëerde schrijfwijze:

$$\sum (F * a) = x_0 * \sum F \quad (5a)$$

Hierin stelt x_0 de afstand voor van de resultante tot punt Q.

Voor praktische toepassingen tekent men de krachten in richting en grootte, bepaalt de som en maakt om een willekeurig punt het statisch moment op, zie fig. 1. Dit punt zullen we bij voorkeur kiezen op de werklijn van een van de twee buitenste krachten.

2

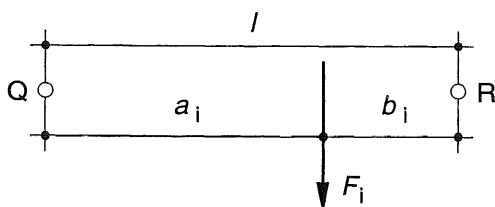


Fig. 2 Bepaling van het statisch moment van een kracht F_i om punt R

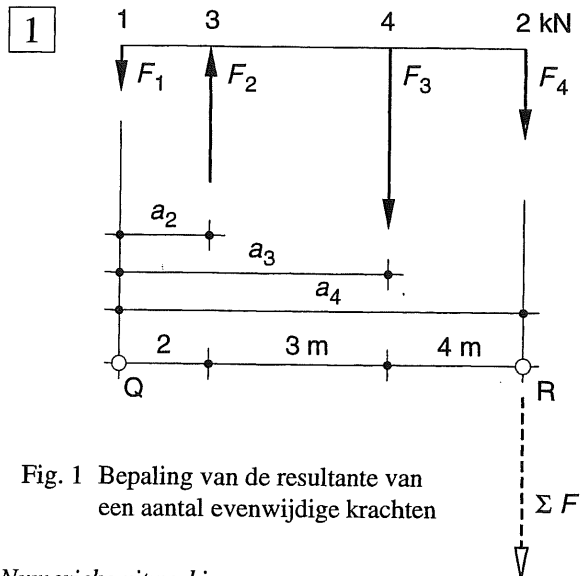


Fig. 1 Bepaling van de resultante van een aantal evenwijdige krachten

Numerieke uitwerking

Grootte van de resultante:

$$\begin{aligned} \sum F &= +F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \\ &= +1 - 3 + 4 + 2 = +4 \text{ kN} \end{aligned}$$

Statisch moment om punt Q:

$$\begin{aligned} \sum (F * a) &= \\ &= +F_1 * a_1 + F_2 * a_2 + F_3 * a_3 + F_4 * a_4 = \\ &= +1 * 0 - 3 * 2 + 4 * 6 + 2 * 9 = \\ &= 0 - 6 + 24 + 18 = +36 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Afstand van de resultante tot Q:

$$x_0 = \sum (F * a) / \sum F = 36 / 4 = 9 \text{ m}$$

De werklijn van de resultante valt dus samen met de werklijn van F_4 ; een resultaat dat men niet zonder meer zou verwachten.

Als controle wordt daarom het statisch moment van alle krachten om punt R opgemaakt. Dit moet gelijk zijn aan nul, omdat het statisch moment van de resultante om dit punt ook gelijk is aan nul.

Statisch moment om punt R: ($b_i = l - a_i$ zie fig. 2)

$$\begin{aligned} \sum (F * b) &= \\ &= +F_1 * b_1 + F_2 * b_2 + F_3 * b_3 + F_4 * b_4 = \\ &= -1 * 9 + 3 * 7 - 4 * 3 - 2 * 0 = \\ &= -9 + 21 - 12 - 0 = 0 \end{aligned}$$

2.4.9 EVENWIJDIGE KRACHTEN BIJZONDERE GEVALLEN

Bij twee even grote en gelijk gerichte krachten ligt de resultante midden tussen beide krachten, zie fig. 3a.

Bij twee even grote en *tegengesteld* gerichte krachten hebben we te doen met een *koppel*.

Het is niet mogelijk om het koppel door één kracht te vervangen, zie fig. 3b.

Indien een berekening – zoals in fig. 1 is weergegeven – als resultaat heeft:

$$\sum F = 0 \text{ en } \sum F * a = K$$

dan is de resultante van alle krachten dus gelijk aan het koppel K en is er geen werklijn aan te wijzen.

Bij twee ongelijk grote krachten in dezelfde richting ligt de resultante tussen beide krachten in en heeft dezelfde richting als deze krachten, zie de witte pijl in fig. 4a.

Bij twee ongelijk grote krachten in tegengestelde richting ligt de resultante *buiten* beide krachten, aan de zijde van de grootste van de twee krachten en in dezelfde richting als deze kracht, zie de witte pijl in fig. 4b.

Let op het verschil in aanpak voor het geven van een teken aan krachten bij de formules in [020] en [021].

In de *tekening* van fig. 1 zijn de krachten in de juiste richting aangegeven, maar in de *formules* van [020] worden alle krachten in principe als positieve grootheden beschouwd, die in neerwaartse richting werken. Pas bij het invullen van de numerieke waarden, wordt waar nodig (zoals bij de kracht F_2), een min-teken in rekening gebracht.

Bij de bijzondere gevallen in [021] worden alle krachten als positieve grootheden beschouwd als ze werken in de getekende richting.

Bij het invullen van getalwaarden in de formule onderaan fig. 4 komen dus alleen positieve waarden voor.

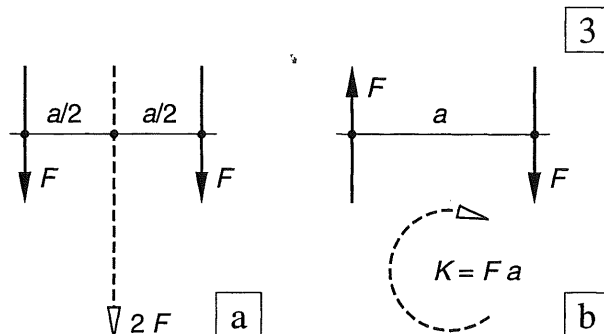


Fig. 3 Resultante van twee evenwijdige en even grote krachten

- beide krachten in dezelfde richting
- beide krachten in tegengestelde richting

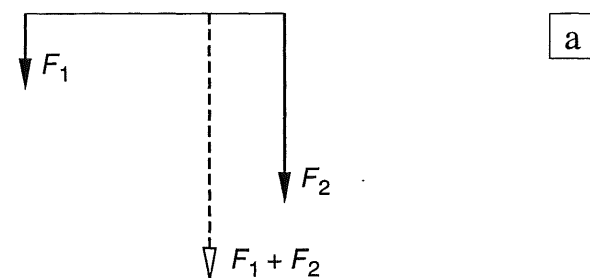
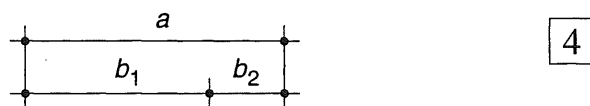


Fig. 4 Resultante van twee evenwijdige, maar ongelijk grote krachten

- Beide krachten in dezelfde richting
- Beide krachten in tegengestelde richting

Als de afstanden van de resultante tot F_1 en F_2 worden aangegeven door b_1 en b_2 , dan geldt zowel voor fig. 4a als voor fig. 4b:

$$b_1 : b_2 = F_2 : F_1$$

2.5.1 ALGEMEEN

Elke kracht kan worden ontbonden in twee of meer andere krachten in willekeurige richtingen met behulp van een krachtenveelhoek.

Het aantal mogelijkheden om een kracht te ontbinden is dus oneindig groot. In de praktijk is slechts een beperkt aantal mogelijkheden van belang, die worden behandeld in de volgende paragrafen [022 t/m 025].

Twee van de vele mogelijkheden om een kracht F te ontbinden in een aantal componenten zijn weergegeven in fig. 1.

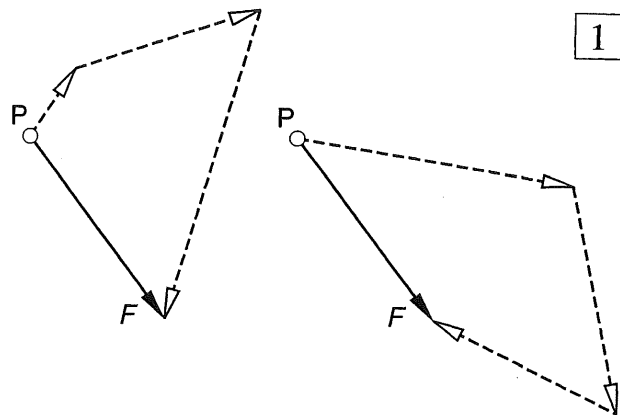


Fig. 1 Twee varianten voor het ontbinden van een kracht F in drie willekeurige componenten

2.5.2 ONTBINDEN IN ONDERLING LOODRECHTE RICHTINGEN

Voor rekenkundige bewerkingen is het dikwijls gemakkelijk om willekeurig gerichte krachten eerst te *ontbinden* in hun componenten in x - en y -richting en dan met deze componenten F_x en F_y verder te werken. Veelal is dit een tussenstap voor het *samenstellen* van willekeurig gerichte krachten. Dit procédé is uitvoerig uiteengezet in [017 t/m 019].

Als de aangrijpingspunten van de krachten op het lichaam bekend zijn, kan de ontbinding daar ter plaatse worden uitgevoerd. De afstanden x_i en y_i tot een willekeurig punt R (binnen of buiten het lichaam gelegen), zijn dan gemakkelijk te bepalen, zie fig. 2a.

In sommige gevallen verdient het aanbeveling om alle krachten eerst langs hun werklijn te verplaatsen tot ze één van beide coördinaat-assen snijden en dan pas de ontbinding uit te voeren. Dit is vooral gunstig als men het moment van de diverse componenten om de oorsprong O opmaakt. Hierbij valt dan steeds één van beide componenten weg uit de vergelijking [018].

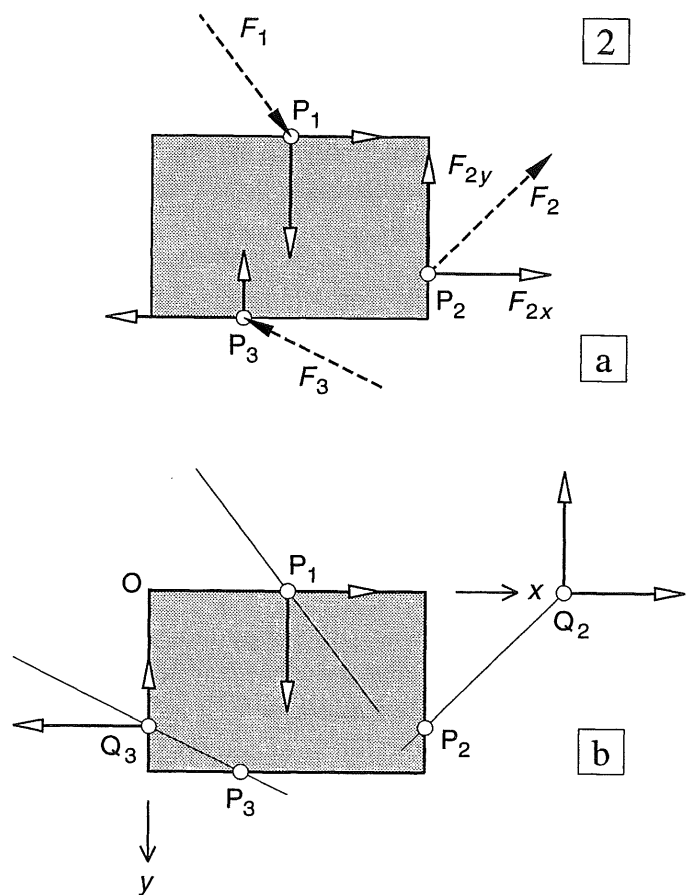


Fig. 2 Ontbinden van krachten in onderling loodrechte richtingen

- Ter plaatse van de aangrijpingspunten van de krachten
- Ter plaatse van de coördinaat-assen

2.5.3 ONTBINDEN IN TWEE GEGEVEN WILLEKEURIGE RICHTINGEN

Indien een kracht F moet worden ontbonden in twee gegeven richtingen r_1 en r_2 , liggen zowel de grootte als de richtingen van beide componenten eenduidig vast.

Met behulp van het parallellogram van krachten is de ontbinding gemakkelijk uit te voeren [007]. De werklijnen van de ontbondenen moeten door hetzelfde – willekeurig gekozen – punt van de oorspronkelijke werklijn gaan, zie fig. 3.

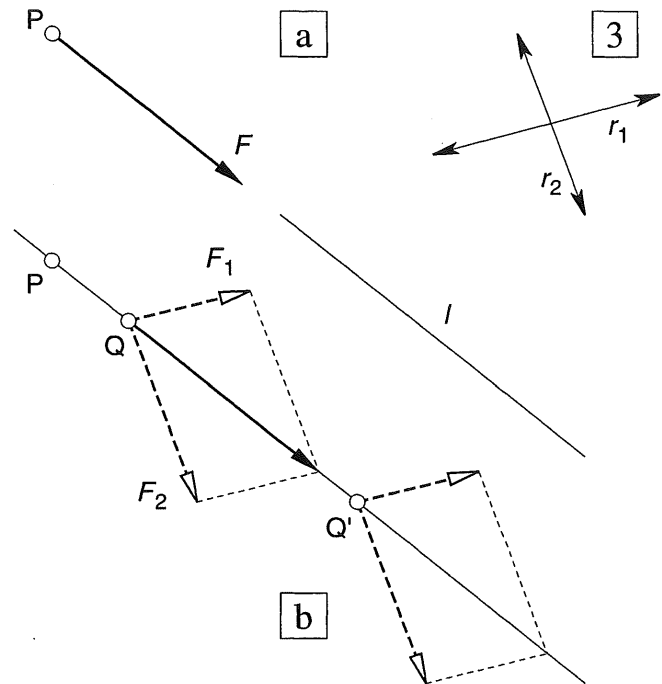


Fig. 3 Ontbinden van een kracht in twee gegeven (willekeurig gekozen) richtingen

- Kracht F en richtingen r_1 en r_2
- Ontbinding in de punten Q en Q'

2.5.4 ONTBINDEN LANGS TWEE GEGEVEN WERKLINIEN EVENWIJDIG AAN DE KRACHT

Een kracht F moet worden ontbonden in de krachten F_1 en F_2 langs de werklijnen l_1 en l_2 , beide evenwijdig aan de werklijn l van de oorspronkelijke kracht F , zie fig. 4.

Door beurtelings het moment op te maken om een (willekeurig) punt Q_1 van l_1 en een punt Q_2 van l_2 , vindt men de grootte van de krachten F_1 en F_2 rechtstreeks in die van F uitgedrukt, zie fig. 4a. Als controle bepaalt men de algebraïsche som van F_1 en F_2 , die gelijk moet zijn aan F .

Analytische berekening

Voor de berekening worden de voorsnog onbekende krachten F_1 en F_2 beide verticaal omlaag als positief aangenomen, zie fig. 4a.

Let op, *ontbinden* betekent: het statisch moment van F is gelijk aan dat van F_1 en F_2 tezamen.

Statisch moment om punt Q_1 :

$$-F * a = +F_2 * b \quad \rightarrow \quad F_2 = -\frac{a}{b} F$$

Statisch moment om punt Q_2 :

$$-F * (a + b) = -F_1 * b \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{a + b}{b} F$$

Controle:
$$F_1 + F_2 = \left[\frac{a + b}{b} - \frac{a}{b} \right] F = F$$

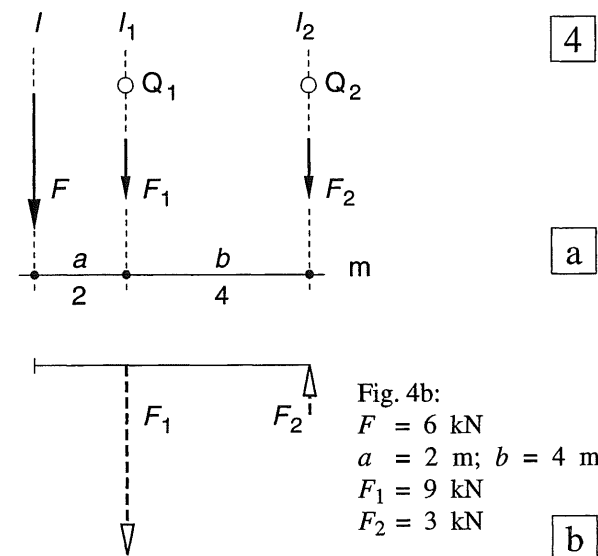


Fig. 4 Ontbinden van een kracht langs twee evenwijdige werklijnen

- De onbekende krachten F_1 en F_2 zijn omlaag als positief aangenomen
- Werkelijke grootte en richting van de krachten

De kracht F_1 heeft een positieve waarde en is dus omlaaggericht; de kracht F_2 heeft een negatieve waarde en is dus omhooggericht, zoals in fig. 4b is weergegeven.

2.5.5 GRAFISCH ONTBINDEN LANGS DRIE GEGEVEN WERKLIJNEN

Een kracht F werkt langs de werklijn l . Deze kracht dient te worden ontbonden langs de drie gegeven werklijnen l_1 , l_2 en l_3 , zie fig. 1a.

In principe zal de kracht F , werkend langs de werklijn l , alle drie de gegeven werklijnen ergens snijden. We beginnen de ontbinding van F vanaf het snijpunt P van l met één van de drie gegeven werklijnen. Deze ontbinding vindt dan plaats langs de betreffende werklijn die door P gaat en een tweede listig gekozen werklijn. Deze wordt namelijk getrokken naar het snijpunt van de andere twee gegeven werklijnen. De component in die richting kan dan direct weer langs de tweede en derde werklijn worden ontbonden.

De uitwerking is weergegeven in fig. 1b :

We verplaatsen de kracht F langs zijn werklijn tot hij aangrijpt in het snijpunt van l met een van de drie gegeven werklijnen. In de figuur is hiervoor het snijpunt P van l met l_2 gekozen.

Met behulp van het parallelogram van krachten ontbinden we F langs l_2 en de lijn $P-Q$, die de verbinding vormt tussen punt P en het snijpunt Q van de beide andere werklijnen l_1 en l_3 .

De ontbondene F_4 wordt nu langs zijn werklijn verplaatst tot hij aangrijpt in punt Q en daar weer ontbonden langs de werklijnen l_1 en l_3 .

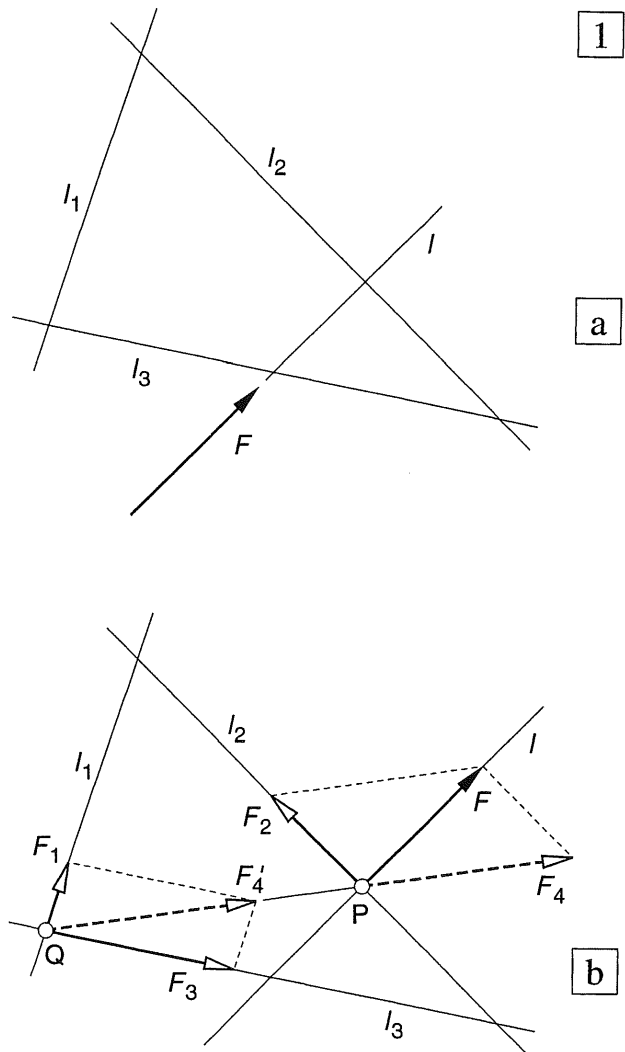


Fig. 1 Grafisch ontbinden van een kracht langs drie gegeven werklijnen

- Ligging van de werklijnen en de kracht
- Grafische constructie

Bij grafische constructies is het in het algemeen moeilijk om zó nauwkeurig te tekenen, dat precies dezelfde resultaten worden verkregen als bij een analytische berekening.

Hierover behoeven we ons geen zorgen te maken. Bedenk dat de grootte van de gegeven krachten en de ligging van de werklijnen, in de praktijk ook maar bij benadering bekend zijn.

Toepassing:

Als een gebouw zijn stabiliteit ontleent aan drie stijve wandvlakken, dan kan met het grafisch ontbinden worden nagegaan hoe de horizontale krachten via deze 'schijven' naar de ondergrond worden afgedragen. Dit is vooral aantrekkelijk als de schijven onderling niet loodrecht op elkaar staan, zie KW-3.

2.5.6 ANALYTISCH ONTBINDEN LANGS DRIE GEGEVEN WERKLINIEN

Voor de analytische ontbinding wordt weer het voorbeeld van fig. 1a gebruikt.

Allereerst worden de krachten F_1 , F_2 , F_3 langs hun werklijnen getekend, en wel in een willekeurig gekozen richting, die voor elke kracht dus als positieve richting geldt, zie fig. 2.

Vervolgens wordt om drie punten – die niet op een rechte lijn mogen liggen – het statisch moment opgemaakt van de drie componenten. De som van deze momenten moet gelijk zijn aan het moment van de oorspronkelijke kracht.

Men krijgt dan drie vergelijkingen met drie onbekenden, waaruit F_1 , F_2 en F_3 kunnen worden opgelost.

Dit procédé verloopt aanmerkelijk eenvoudiger als de werklijnen l_1 , l_2 en l_3 elkaar binnen het bereik van de tekening snijden.

Als we nu achtereenvolgens het moment opmaken om de drie snijpunten, dan vallen steeds twee onbekenden weg uit een vergelijking en wordt de derde onbekende rechtstreeks in de gegeven kracht F en het quotiënt van twee bekende afstanden uitgedrukt. We volstaan met de berekening van de onbekende kracht F_2 .

Statisch moment om Q:

$$-F * b = +F_1 * 0 + F_2 * a_2 + F_3 * 0 \quad (6)$$

Hieruit volgt:

$$F_2 = -\frac{b}{a_2} F$$

Op geheel overeenkomstige wijze levert het statisch moment om punt R:

de kracht F_3 (negatief),
en het moment om punt S de kracht F_1 (pos).

Als meerdere bekende krachten tegelijkertijd langs drie gegeven werklijnen moeten worden ontbonden, kan hetzelfde procédé worden toegepast. Vergelijking (6) gaat dan over in:

$$\sum F_i * b_i = +F_1 * 0 + F_2 * a_2 + F_3 * 0 \quad (6a)$$

Op het eerste gezicht lijkt dit een ingewikkeld proces, maar in feite wordt dit principe altijd toegepast voor de berekening van vakwerkliggers met behulp van de snedemethode, zie KW-3. De uitwendige krachten zijn hier evenwijdig en staan op regelmatige afstanden, hetgeen de overzichtelijkheid sterk bevordert.

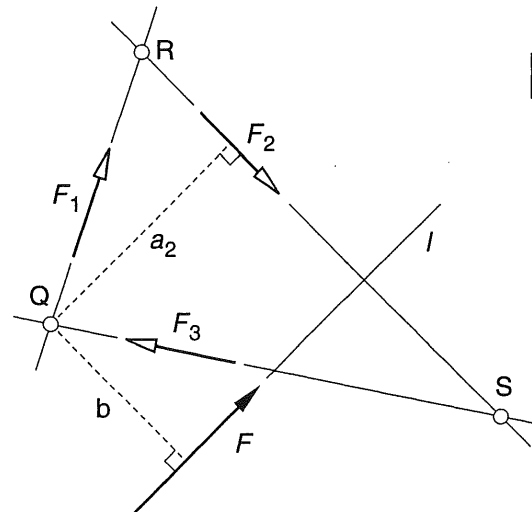


Fig. 2 Aangenomen positieve richtingen van de drie krachten voor analytisch ontbinden

□ Variant

Het tekenen van loodlijnen en het opmeten van de lengte daarvan, blijkt onder studenten maar matig populair te zijn. Wie 'exacte' resultaten wenst te verkrijgen, kan als volgt te werk gaan (uitwerking alleen voor F_2).

Vanuit punt Q worden horizontale en/of verticale lijnen getrokken, die de werklijnen l_1 en l_2 snijden in de punten P_0 en P_2 . De krachten F en F_2 worden ontbonden in een verticale en een horizontale component.

Voor de getekende situatie van fig. 3 gaat vergelijking (6) dan over in:

$$-F_x * y_0 = +F_1 * 0 + F_{2y} * x_2 + F_3 * 0 \quad (6b)$$

Hieruit volgt F_{2y} . Uit de helling van de betreffende werklijn volgt dan ook F_{2x} , dus eveneens de kracht F_2 .

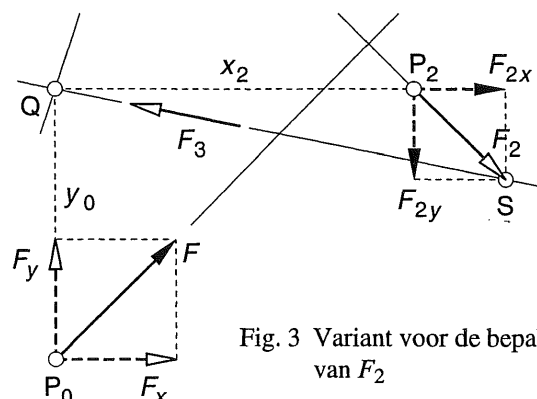


Fig. 3 Variant voor de bepaling van F_2

3 EVENWICHT

Evenwicht van lichamen in de ruimte en in het platte vlak

3.1 INLEIDING

3.1.1 EVENWICHT VAN KRACHTEN

Elk onderdeel van een gebouw heeft een massa, en is dus onderworpen aan de zwaartekracht. In [031] wordt een kracht gedefinieerd als de oorzaak van een beweging. Van onze gebouwen wordt echter niet verwacht dat ze in beweging zullen komen, maar dat ze in rust zijn en ook blijven. Dit is alleen mogelijk als alle krachten die op een gebouw-onderdeel werken, evenwicht kunnen maken met andere krachten.

De diverse bouwdelen worden op elkaar gelegd om te voorkomen dat ze omlaagvallen. Als we het gewicht van zo'n deel als 'actiekracht' aanduiden, dan leveren de ondersteuning dus de 'reactiekrachten' die nodig zijn om evenwicht te maken.

Zo kunnen we van boven naar beneden gaande, alle onderdelen stuk voor stuk beschouwen, tot uiteindelijk alle op het gebouw werkende krachten naar de ondergrond zijn afgevoerd.

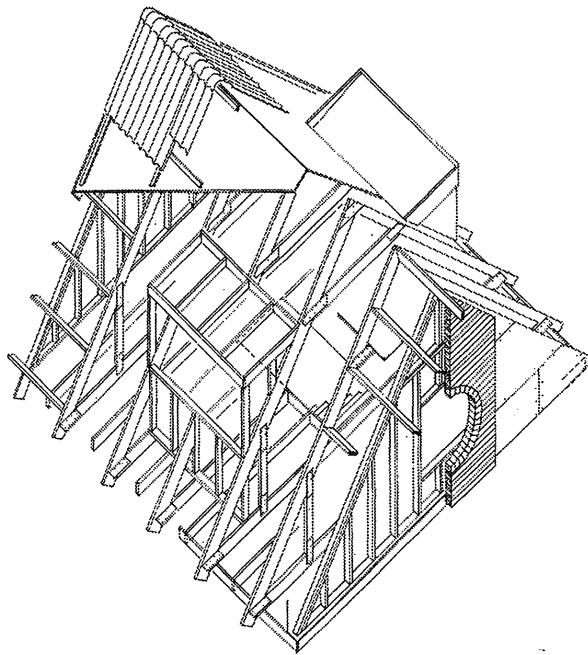


Fig. 1 Stapelen van bouwdelen om te voorkomen dat ze omlaagvallen {4}
{ 4 } Map Bouwmethodiek II, L. Hulsbos c.s.
TU Bouwkunde, Delft, 1986

Het totale gewicht van een gebouw moet dus door de ondergrond worden opgenomen. Bij een slappe ondergrond zullen we er voor moeten zorgen dat het gebouw niet in de grond wegzakt, zoals bij een moerasachtige veengrond gemakkelijk kan gebeuren, zie fig. 2b.

De 'actiekrachten' zorgen dan voor het in beweging raken van het gebouw in neerwaartse richting. Deze beweging zal worden afgeremd omdat zelfs een moerasachtige grond nog reactiekrachten kan leveren, zij het ook van onvoldoende grootte. Door de beweging zal de grond onder het gebouw steeds sterker worden samengedrukt en het is denkbaar dat de 'reactiekrachten' hierdoor zodanig toenemen dat alsnog een evenwichtstoestand wordt bereikt en het gebouw tot rust komt, zie fig. 2b. De bewoner van zo'n gebouw zal een dergelijk proces met gemengde gevoelens ondergaan.

Het is echter even goed mogelijk dat de slappe grond zijdelings onder het gebouw wordt weggeperst en dat het gebouw pas tot stilstand komt wanneer het op veel dieper gelegen stijve lagen komt te rusten, die de benodigde krachten wel kunnen leveren, zie fig. 2c.

In het bovenstaande voorbeeld dat is ontleend aan {2}, is de reactiekracht dus niet automatisch aanwezig, maar ontstaat pas door het vervormen van de ondergrond. We zullen spoedig zien dat dit beginsel algemeen geldt.

Reactiekrachten kunnen enkel en alleen maar ontstaan door vervormingen van het onderdeel dat die krachten moet leveren, ongeacht hoe klein die vervormingen ook mogen zijn.

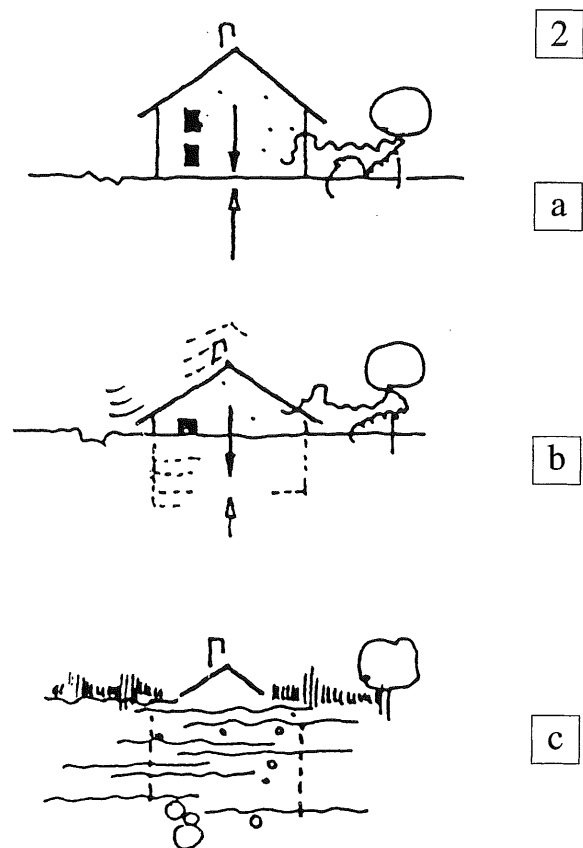


Fig. 2 Levering van reactiekrachten {2}.

- a. Ideale toestand; de grond kan de reactiekrachten leveren bij een verwaarloosbaar kleine indrukking.
- b. Overschatting van de draagkracht van de grond; de reactiekrachten nemen langzaam in grootte toe bij het dieper wegzakken in het moeras.
- c. Verwerpelijke situatie; de reactiekrachten kunnen pas worden geleverd door dieper gelegen stijve lagen.

{ 2 } F. Kraus, W Führer, H.J. Neukäter, 'Grundlagen der Tragwerkslehre' Aachen 1983

3.1.2 BEPALING KRACHTSWERKING

Voor het bepalen van de krachtswerking in een gebouw zullen we *altijd* beginnen met het bepalen van de *reactiekrachten*, die voor elk onderdeel evenwicht maken met de *actiekrachten*, die door de zwaartekracht, wind of andere invloeden worden veroorzaakt. Voor een afzonderlijk bouwdeel worden deze reactiekrachten meestal de *oplegreacties* genoemd.

Hiertoe kan een aantal noodzakelijke voorwaarden worden geformuleerd, die worden aangeduid als de *evenwichtsvoorwaarden*.

Als deze voorwaarden voldoende zijn om de oplegreacties van het beschouwde onderdeel te bepalen, noemen we de ondersteuning of oplegging van de constructie *statisch bepaald*.

Als we aan de evenwichtsvoorwaarden niet voldoende hebben, noemen we de ondersteuning *statisch onbepaald*. We moeten dan ook de vervormingen van de constructie in de berekening verdisconteren, zie KW-2.

Als we dit formeel aanpakken, dan blijkt vrijwel geen enkele constructie statisch bepaald te zijn opgelegd. Daarom zullen we eerst nagaan op welke wijze reactiekrachten tot stand kunnen komen. Dit blijkt in hoge mate af te hangen van de manier waarop een constructiedeel wordt ondersteund. Vervolgens zullen we de ondersteuning sterk schematiseren.

In vele gevallen blijken de eerder genoemde evenwichtsvoorwaarden dan alsnog voldoende om een geïdealiseerde oplegreactieverdeling te kunnen aangeven.

De basisproblemen die we daarbij tegenkomen, zullen we behandelen aan de hand van een driedimensionaal rechthoekig blok, dat is onderworpen aan een verticale kracht (eigen gewicht) en een horizontale kracht (wind). De krachten kunnen zowel afzonderlijk als gezamenlijk werken.

Dit is een minder academische benadering dan men op het eerste gezicht zou denken. De meest gebruikte onderdelen bij gebouwen bestaan immers vrijwel allemaal uit rechthoekige blokken, waarbij één of twee afmetingen sterk overheersen, zie fig. 1. Terwille van de duidelijkheid bij de afleiding van de betrekkingen, zijn de blokken in hoofdstuk 3 nog niet in de extreme geometrische afmetingen van fig. 1 getekend.

Als één afmeting overheerst spreken we van een lijnvormig constructiedeel: *kolom*, *balk*.

Als twee afmetingen overheersen spreken we van een vlak constructiedeel: *wand*, *vloer*.

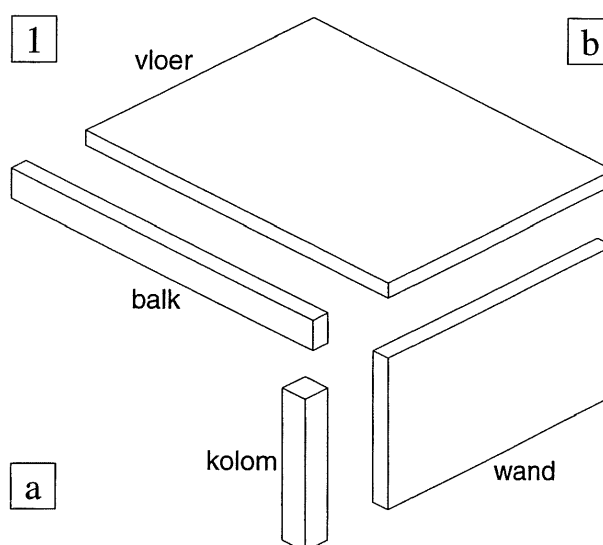


Fig. 1 Belangrijkste vormen van constructie-onderdelen
 a. Lijnvormige constructiedelen
 b. Vlakke constructiedelen

In de voorbeelden van hoofdstuk 3 wordt eigenlijk een soort 'blokkendoos-mechanica' besproken. We gaan er vanuit dat de afzonderlijke onderdelen sterk en stijf genoeg zijn [071-072]. Dit houdt in; de onderdelen gaan niet stuk en vertonen ook geen vervormingen. Hetzelfde geldt voor de *blokken* van een blokkendoos.

De *blokkenstapelning* kan echter wel degelijk instorten en mogelijk is dit zelfs de grootste charme van het spelen met een blokkendoos.

Bij ons gedachtenmodel van een bouwwerk worden de onderdelen eveneens los op elkaar gestapeld en we gaan na hoe de krachten naar de ondergrond kunnen worden afgedragen, zie fig. 2. Bovendien onderzoeken we welke extra krachten er nog op deze onderdelen mogen werken voordat de zaak werkelijk omvalt.

Dit stapelen is een zeer elementaire manier van bouwen. Op deze wijze zijn de Nederlandse hunebedden tot stand gekomen, evenzo het monument van Stonehenge, zie fig. 3, maar ook vele Egyptische tempels in de zgn. architraafbouw, zie fig. 4.

In feite wordt ook heden ten dage bij de 'gestapelde bouw' maar weinig zorg besteed aan de onderlinge verbinding van de bouwdelen. De meeste onderdelen in de woningbouw worden immers alleen maar op elkaar 'gelijmd' met metselspecie of kunststoflijm.

Een dergelijk gebouw zit alleen dan maar goed in elkaar als het die lijmverbinding niet echt nodig heeft, maar ook als losse stapeling van onderdelen nog goed kan functioneren.

Aan de hand van de uitkomsten van deze beschouwingen kan dan vrij gemakkelijk worden aangegeven, waarom men in de praktijk tot een bepaalde wijze van schematiseren is gekomen. Ook de invloed van min of meer stevige verbindingen tussen de constructie-onderdelen is dan redelijk in te schatten.

De wijze waarop deze verbindingen in de praktijk worden gerealiseerd, wordt behandeld bij het vak DRAAGCONSTRUCTIES.

2

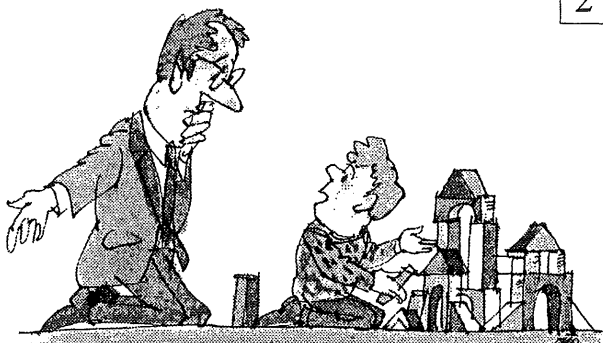


Fig. 2 'Blokkendoos-mechanica' (O. Dicke)



Fig. 3 Stonehenge; losse stapeling van vrij grof bewerkte blokken

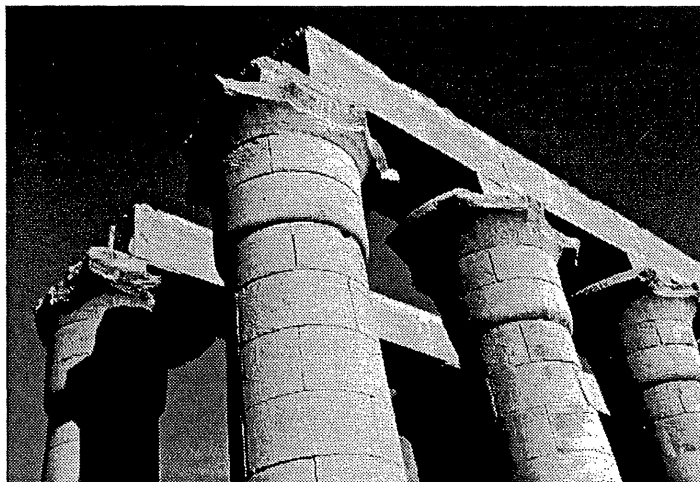


Fig. 4 Egyptische tempel te Karnak; losse stapeling van nauwkeurig bewerkte blokken; de zgn. Architraafbouw

3.2.1 ALGEMEEN

In hoofdstuk 2 werd het begrip kracht min of meer intuïtief bekend verondersteld en werden regels verstrekt om met krachten te kunnen werken. In hoofdstuk 3 wordt echter uitgegaan van de wetten die Newton over krachten heeft geformuleerd.

Aangezien Newton een verklaring zocht voor de loop der hemellichamen, maar wij ons alleen bezig houden met voorwerpen op de aarde die zich niet verplaatsen, kunnen we enkele wetten gewoon voor kennisgeving aannemen.

Eén wet blijkt echter van zeer grote betekenis te zijn voor de toegepaste mechanica; deze zegt dat krachten in niet bewegende voorwerpen daarin altijd paarsgewijs optreden.

3.2.2 GRAVITATIEWET

Het gehele doen en laten van de mens op aarde, dus ook zijn manier van bouwen, wordt in sterke mate bepaald door de aantrekkingskracht van de aarde, de zgn. gravitatiekracht.

In zijn verklaring voor de loop der hemellichamen heeft Newton de volgende wet geformuleerd, die de kracht aangeeft waarmee twee (hemel)lichamen elkaar aantrekken:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

waarin:

- G = evenredigheidsconstante,
(gravitatieconstante)
- r = de afstand van de middelpunten
(zwaartepunten) van de lichamen
- m_1, m_2 = de massa's van beide lichamen

Omdat de massa van de aarde zo groot is, valt de onderlinge aantrekkingskracht tussen twee voorwerpen op aarde volledig in het niet tegenover de aantrekkingskracht tussen de aarde en elk voorwerp afzonderlijk. Aangezien de massa van de aarde constant is, volgt uit formule (1) dat de kracht waarmee de aarde een voorwerp aantrekt, evenredig is met de *massa* van dat voorwerp, zie formule [032-2d].

Desalnietemin is de aantrekkingskracht van de aarde enigszins afhankelijk van de plaats op aarde waar men zich bevindt. De aarde is namelijk aan de polen lichtelijk afgeplat, zodat de afstand r hier kleiner is dan aan de evenaar. Daaruit vloeit voort dat de aantrekkingskracht aan de polen iets groter is dan aan de evenaar.

De verschillen zijn klein, zo vindt men:

aan de polen: $g = 9,83 \text{ m/s}^2$

in Nederland: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

aan de evenaar: $g = 9,79 \text{ m/s}^2$

Met de bovenstaande verfijningen zullen we ons verder niet bezighouden.

In al onze berekeningen zullen we g steeds afronden op: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

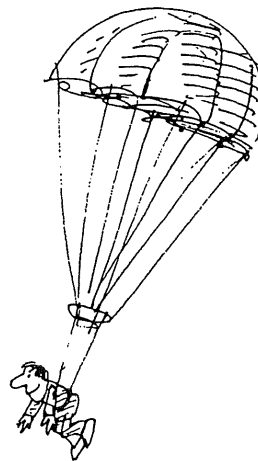


Fig. 1 Parachuterspringer (O. Dicke)

3.2.3 BEWEGINGSWETTEN

In de toegepaste mechanica wordt gebruik gemaakt van drie fundamentele bewegingswetten die door Newton zijn geformuleerd.

1. Wet van de traagheid
2. Kracht = massa \times versnelling
3. Actie = reactie

1. *Wet van de traagheid*

Als er geen kracht op een lichaam werkt, dan beweegt het lichaam zich voort in een rechte lijn met een constante snelheid v .

Al onze bouwwerken zijn in rust, ze vertonen het bijzondere geval dat $v = 0$.

We weten dat op elk bouwwerk de gravitatiekracht of zwaartekracht werkt.

Kennelijk kunnen er door de ondergrond tegenwerkende krachten worden geleverd, die de werking van eerstgenoemde kracht opheffen, zodat de som van alle krachten die op het bouwwerk aangrijpen, gelijk aan nul moet zijn.

2. *Kracht = massa \times versnelling*

De oorspronkelijke formulering van de wet luidt als volgt:

$$F = \frac{d(m * v)}{dt} \quad (2a)$$

Aangezien op aarde de massa van alle voorwerpen constant is, kan men hiervoor schrijven:

$$F = m \frac{dv}{dt} = m * a \quad (2b)$$

De kracht wordt hierbij dus gedefinieerd als de oorzaak van een snelheidsverandering, de grootheid a stelt hier namelijk geen afstand voor, maar de versnelling van het voorwerp.

Zoals voorheen werd betoogd, moet de grootheid F in formule (2b), de som van alle krachten voorstellen die aangrijpen op het lichaam, in ons geval dus een bouwwerk. Eigenlijk geldt dus:

$$\sum F = m * a \quad (2c)$$

Deze tweede wet leidt tot dezelfde conclusie als de eerste wet. Als geldt dat de snelheid $v = 0$, geldt uiteraard ook dat de versnelling $a = 0$, en moet dus ook gelden dat $\sum F = 0$.

Ter verduidelijking van de eerste en tweede bewegingswet van Newton kan het voorbeeld van een parachutespringer verhelderend werken.

Direct na het verlaten van het vliegtuig werkt alleen de zwaartekracht. In het luchtledige zou de verticale snelheid elke seconde toenemen met 10 m/s. Er ontstaan echter tegenwerkende krachten tengevolge van de wrijving van de lucht. Deze krachten worden aanzienlijk zodra de parachute geopend is; ze zijn evenredig met het kwadraat van de snelheid. Er zal zich dus een evenwichtssnelheid moeten instellen, waarbij de zwaartekracht op het lichaam en de resultante van de wrijvingskrachten precies aan elkaar gelijk zijn. De parachutespringer houdt dan een constante verticale snelheid, die door de werking van de parachute een zodanige grootte heeft dat redelijk veilig kan worden geland.

3. *Actie = Reactie*

Indien lichaam I op lichaam II een kracht F uitoefent, dan zal lichaam II op lichaam I een even grote kracht F uitoefenen, die echter tegengesteld is gericht.

In een evenwichtstoestand treden krachten dus altijd in paren op die gelijk zijn maar tegengesteld gericht, zie het voorbeeld van de touwtrekkende kinderen in [002].

De wet '*actie = reactie*' zal zeer vaak in de toegepaste mechanica worden gebruikt; men dient haar dan ook 'blindelings' te kunnen hanteren.

3.2.4 RELATIE KRACHT – MASSA

De tweede bewegingswet van Newton [031] wordt door ons eigenlijk alleen maar gebruikt om de krachten te definiëren die door de massa's van de verschillende bouwmaterialen worden veroorzaakt.

We beschouwen formule [031-(2b)]:

$$F = m * a$$

Hierin wordt aangegeven dat de eenheid van kracht er de oorzaak van is dat de eenheid van massa de eenheid van versnelling krijgt.

In het SI-stelsel worden de volgende eenheden aangehouden:

eenheid van kracht	N	(Newton)
eenheid van massa	kg	(kilogram)
eenheid van versnelling	m/s ²	(meter per seconde kwadraat)

Aangezien elke massa bij vrije val (in het luchtledige) ten gevolge van de zwaartekracht dezelfde versnelling krijgt van $g \text{ m/s}^2$, werkt op een massa van $m \text{ kg}$ dus een kracht:

$$F = m * g \text{ Newton} \quad (2d)$$

Omdat we de versnelling van de zwaartekracht hebben afgerond op $g = 10 \text{ m/s}^2$, veroorzaakt een massa van 1 kg dus een verticale kracht van 10 N.

Het verhaal wil dat het vallen van een appel uit een appelboom Newton op het idee bracht om zijn meest bekende wet te formuleren, zie fig. 1. Hoe het ook zij, het plaatje biedt in ieder geval een geheugensteuntje voor de grootte van krachten.

Een appel heeft een massa van ongeveer 0,1 kg en veroorzaakt dus een kracht van 1 Newton.

Een vrij zwaar persoon van 100 kg veroorzaakt dan een kracht van 1000 Newton = 1 kiloNewton.

Dus heel globaal:

De appel weegt ongeveer 1 Newton

Newton zelf weegt ongeveer 1 kiloNewton

In het dagelijks leven wordt er tussen kracht en massa geen onderscheid gemaakt.

De begrippen N en kN zijn onbekend, we gebruiken uitsluitend de begrippen kg en g.

We zeggen dan ook dat een voorwerp 5 kg weegt, terwijl we strict genomen zouden moeten zeggen: het voorwerp bezit een massa van 5 kg en op aarde weegt het 50 N.

Als het voorwerp op een ruimtereis wordt meegenomen, heeft het nog steeds een massa van 5 kg, maar de aantrekkingskracht van de aarde is uitgewerkt en het 'weegt' dus niets meer.

In de oude voorschriften (TGB 1950) werd voor bouwmaterialen de massa per volume vermeld:

ρ in kg/m³.

In de nieuwe voorschriften (TGB 1990) is dit gemakshalve weer vervangen door het gewicht per volume:

γ in kN/m³.

In tabel 2 [075] zijn voor een aantal veel gebruikte bouwmaterialen de numerieke waarden vermeld voor het gewicht per volume.

1



Fig. 1 Newton en de vallende appel (O. Dicke)

3.3.1 ALGEMEEN

Het wordt door een ieder op aarde als volkomen normaal ervaren dat alle voorwerpen op aarde, die alleen zijn onderworpen aan de werking van de zwaartekracht, zich in rust bevinden. Alleen door het ingrijpen van de mens (of door natuurkrachten) zullen voorwerpen van plaats kunnen veranderen. Dit houdt in dat de aarde altijd in staat blijkt te zijn om reactiekrachten te leveren, die ervoor zorgen dat elk voorwerp – hetzij direct of na enige verplaatsing – een evenwichtspositie kan vinden.

Men kan hierbij denken aan het huisraad in een woning waar alles zijn vaste plaats heeft. Het staat ons vrij om voorwerpen te verplaatsen door ze op te pakken of te verschuiven, maar in hun nieuwe positie blijven ze weer gewoon staan. En zelfs al zouden we besluiten om met één armzwaai de zorgvuldig gedekte ontbijttafel schoon te vegen, dan nog zullen de diverse voorwerpen in hele of gebroken toestand weer een nieuwe evenwichtsstand op de vloer hervinden.

Over het vinden van een evenwichtstoestand van voorwerpen maken we ons in het dagelijkse leven nauwelijks zorgen. Als er een enkele keer toch evenwichtsverlies optreedt, zijn we steeds weer onaangenaam verrast, zelfs bij zulke mini-probleempjes als in [046] worden besproken. Voor een gebouw heeft het evenwichtsverlies van enkele onderdelen of zelfs het gehele bouwwerk echter zwaarwegende consequenties. We zullen dit ten allen tijde moeten voorkómen.

Het blijkt van essentieel belang voor de krachtwerving te zijn, op welke wijze de ondergrond – hetzij direct of door tussenkomst van andere gebouwdelen – de benodigde krachten voor het evenwicht kan leveren.

Om hier achter te kunnen komen, is het nodig om van evenwichtsvoorwaarden gebruik te maken. Deze zullen in [034] worden geformuleerd voor krachten en momenten die alle in hetzelfde platte vlak liggen, en vervolgens in [036] voor krachten en momenten in de ruimte.

3.3.2 MOMENT-VECTOR

Een koppel (of een moment), is evenals een kracht een vector, het heeft een grootte en een (draai)richting. Koppels kunnen dus – evenals krachten – vectoriëel worden samengesteld en ontbonden. Maar dan zullen we eerst een momentvector moeten definiëren; met de gebogen pijlen die meestal in het platte vlak worden getekend, zoals in [014-015], is niets te beginnen.

Een momentvector wordt aangegeven door een pijl met een dubbele punt, zie fig. 2b. De lengte van het lijnstuk geeft de grootte van de vector aan, en de richting van het lijnstuk de richting van de rotatie-as. Dit betekent dat een koppel in het verticale x - y -vlak volgens fig. 2a, als vector loodrecht op dit vlak moet worden getekend, zie fig. 2b. Als de pijl in de richting van de positieve z -as wijst, veroorzaakt het koppel een rechtsdraaiende rotatie in het x - y -vlak. Om dit te kunnen onthouden, gaan we als het ware achter de pijl staan (aan het beginpunt) en we brengen een rotatie aan als bij het indraaien van een kurketrekker. De index geeft aan om welke as de rotatie plaats heeft, in dit geval schrijven we dus K_z .

Zoals is besproken in 2.2.4 [004] mogen koppels in het platte vlak willekeurig worden verplaatst en verdraaid (en bovendien nog algebraïsch worden opgeteld).

In fig. 2a zijn een aantal koppels gesuperponeerd, die met gebogen pijlen zijn weergegeven. In fig. 2b is dit voor dezelfde koppels gedaan, maar nu in vector-notatie. Ook deze koppels kunnen weer gewoon algebraïsch worden opgeteld, maar desgewenst kunnen de lijnstukken ook grafisch worden samengesteld. In het platte vlak levert dit nauwelijks voordelen op, maar in de ruimte kunnen we met momentvectoren precies eender werken als met krachtvectoren [035]

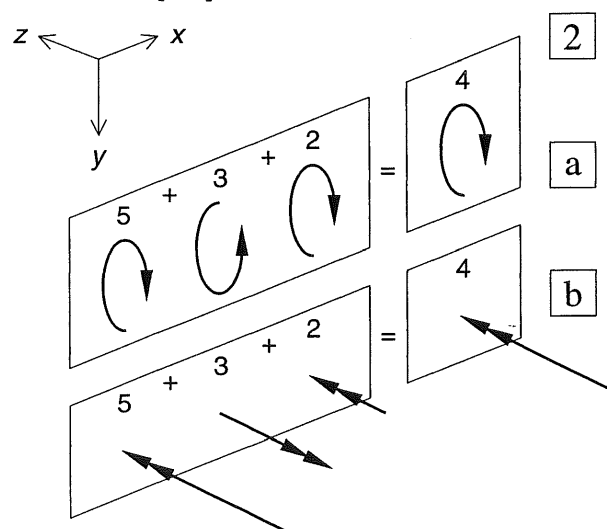


Fig. 2 Superpositie van een aantal koppels
a. Weergegeven met gebogen pijlen
b. In vector-notatie

3.3.3 EVENWICHTSVOORWAARDEN IN HET PLATTE VLAK

Voor het formuleren van de evenwichtsvoorwaarden in het platte vlak wordt uitgegaan van het samenstellen van krachten die niet door één punt gaan, volgens de analytische methode zoals die is beschreven in [017 t/m 019].

Hierbij worden alle krachten die op het beschouwde lichaam werken, eerst ontbonden in x - en y -richting en vervolgens verplaatst naar een willekeurig punt Q .

In dit punt kennen we dan de componenten ΣF_x en ΣF_y van de resultante. Door dit verplaatsen ontstaat tevens een resulterend koppel ΣK_z .

Als een lichaam (in dit platte vlak gelegen) in evenwicht verkeert, kan er dus geen resulterende kracht of een resulterend koppel op werken en moet dus gelden:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (3a)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (3b)$$

$$\Sigma K_z = 0 \quad (3c)$$

In woorden:

- de som van alle horizontale krachten moet gelijk zijn aan nul,
- de som van alle verticale krachten moet gelijk zijn aan nul,
- de som van alle statische momenten – om elk willekeurig gekozen punt – moet gelijk zijn aan nul.

De formules (3a), (3b) en (3c) zijn weer samen te vatten tot de twee reeds eerder genoemde voorwaarden:

- De resulterende kracht op het beschouwde onderdeel moet gelijk zijn aan nul, want anders zal het voorwerp in (rechtlijnige) beweging komen.
- Het resulterend koppel op het beschouwde onderdeel moet gelijk zijn aan nul, want anders zal het voorwerp gaan roteren.

Een voorwerp zal alleen dan een rechtlijnige beweging ondergaan als de werklijn van de kracht door het zgn. zwaartepunt van het voorwerp gaat. Als dit niet het geval is, zal het voorwerp bovendien nog gaan roteren.

Variant voor de evenwichtsvoorwaarden

In plaats van de formules (3) toe te passen, kan men ook het momenten-evenwicht opmaken om drie verschillende punten 1, 2 en 3, die niet op één rechte lijn mogen liggen, zie fig. 1.

In dat geval moet gelden:

$$\Sigma K_1 = 0 \quad (4a)$$

$$\Sigma K_2 = 0 \quad (4b)$$

$$\Sigma K_3 = 0 \quad (4c)$$

De evenwichtsvoorwaarden volgens de formules (3) zijn een bijzondere vorm van de algemene formules (4). In formule (3a) is het moment namelijk opgemaakt om een punt $Q_1(0, \infty)$ in het oneindige van de y -as gelegen, in formule (3b) is hetzelfde gedaan voor een punt $Q_2(\infty, 0)$ in het oneindige van de x -as gelegen.

Na het behandelde onder 3.3.2 [033] zal het duidelijk zijn dat de drie punten 1, 2 en 3, in feite de snijpunten zijn van drie rotatie-assen, die loodrecht op het beschouwde vlak staan, zie fig. 1.

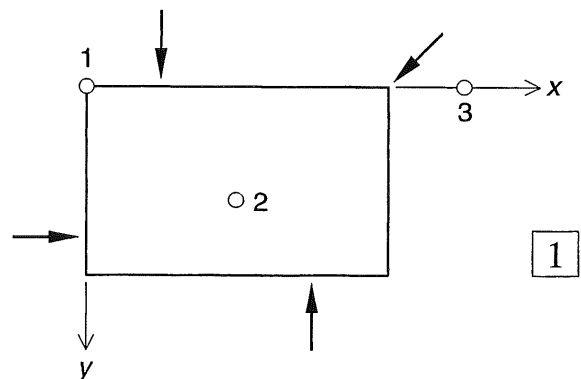


Fig. 1 Variant voor de evenwichtsbeschouwing. Het evenwicht wordt opgemaakt om drie assen (1, 2, 3), die loodrecht staan op het beschouwde vlak.

De snijpunten van deze assen met het beschouwde vlak mogen niet op één rechte lijn liggen.

3.3.4 KRACHTEN EN MOMENTEN IN DE RUIJTE

In principe is het nodig om het evenwicht in de ruimte te beschouwen. In veel gevallen wordt echter volstaan met een projectie van de krachten op twee of drie coördinaatvlakken [036].

Krachten

Een willekeurig gerichte kracht F wordt bepaald door zijn drie componenten, dat wil zeggen: de projecties van de kracht op de drie coördinaat-assen. Hierbij geldt:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (5)$$

en in vectoriële schrijfwijze:

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z \quad (6)$$

Dit laatste is direct in te zien door F eerst volgens [009-3] in een verticaal plat vlak te ontbinden in een verticale en een horizontale component. Vervolgens wordt de horizontale component F_H weer in het horizontale vlak ontbonden langs de x - en y -as, zie fig. 2.

Krachtvectoren worden altijd met een enkele pijl aangegeven. De drie componenten van de kracht worden positief gerekend in de richting van de positieve assen, zie fig. 3a.

Momenten

Een koppel in de ruimte kan eveneens worden ontbonden in zijn drie componenten:

$$\underline{K} = \underline{K}_x + \underline{K}_y + \underline{K}_z \quad (7)$$

Momentvectoren worden altijd met een dubbele pijl aangegeven weergegeven; de vector K_x ligt hierbij in de richting van de x -as en geeft een draaiing aan om de x -as, zie fig. 3b. De momentvectoren worden positief gerekend in de richting van de positieve assen.

Voor het bepalen van de positieve draairichting gaat men als het ware achter de pijl staan en brengt een rotatie rechtsonder aan als bij het indraaien van een kurketrekker.

Als koppels door vectoren zijn weergegeven, kunnen ze op precies dezelfde wijze als krachten worden samengesteld en ontbonden.

Zoals reeds werd betoogd is bij alle voorgaande beschouwingen in het x - y -vlak – waarbij het assenkruis een kwart slag was gedraaid – het koppel K in feite de component K_z geweest, zie fig. [033-2]. De positieve draairichting geeft dan inderdaad een rechtsdraaiende rotatie van de x -as naar de y -as. Evenzo geeft K_x een positieve (rechtsdraaiende) rotatie van de y -as naar de z -as en K_y een positieve rotatie van de z -as naar de x -as, zie fig. 3.

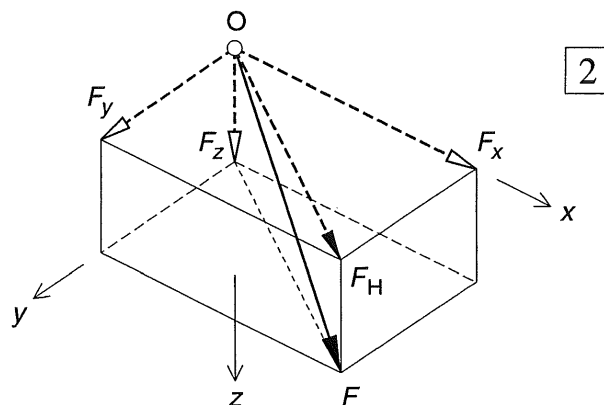


Fig. 2 Ontbinden van een kracht F in zijn drie orthogonale componenten

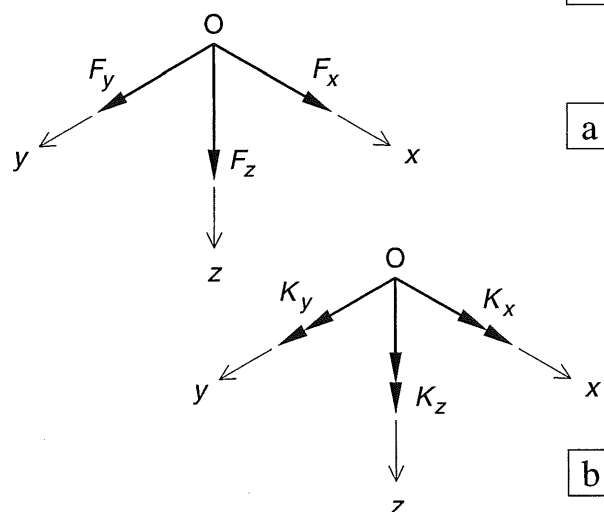


Fig. 3 Positieve componenten van vectoren
a. Krachtvectoren
b. Momentvectoren

3.3.5 EVENWICHTSVOORWAARDEN IN DE RUIMTE

Alle bouwkundige constructies en onderdelen daarvan zijn drie-dimensionaal. Ook de krachten die op een constructie aangrijpen, hebben in principe componenten in drie dimensies.

Voor het overgrote deel van onze berekeningen zullen we echter gebruik maken van de projectie van de constructie – met de daarop werkende krachten – op een verticaal plat vlak.

Eerst wordt bijv. de projectie op het x - z -vlak onderzocht en zonodig daarna de projectie op het y - z -vlak, zie fig. 1a, b, c.

Soms is ook nog een projectie op het x - y -vlak noodzakelijk, zie fig. 1d.

Al onze evenwichtsbeschouwingen in het platte vlak zijn in feite op een dergelijke handelwijze gebaseerd.

Als een lichaam in de ruimte in evenwicht verkeert, kan er geen resulterende kracht op werken en ook geen resulterend koppel. Dit laatste houdt in dat het statisch moment om elke willekeurig gekozen lijn gelijk moet zijn aan nul.

De evenwichtsvoorwaarden luiden dus:

$$\sum F_x = 0 \quad (8a)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (8b)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (8c)$$

$$\sum K_x = 0 \quad (9a)$$

$$\sum K_y = 0 \quad (9b)$$

$$\sum K_z = 0 \quad (9c)$$

Zoals vermeld in [035] kunnen momentvectoren op precies dezelfde wijze worden samengesteld en ontbonden als krachtvectoren.

Voor het bepalen van het evenwicht van een lichaam mogen *momentvectoren* echter vrij in de ruimte worden verplaatst, zolang de richting van elke vector maar onveranderd blijft.

Zoals bekend mogen *krachtvectoren* voor de bepaling van het evenwicht alleen maar langs hun eigen werklijn worden verschoven.

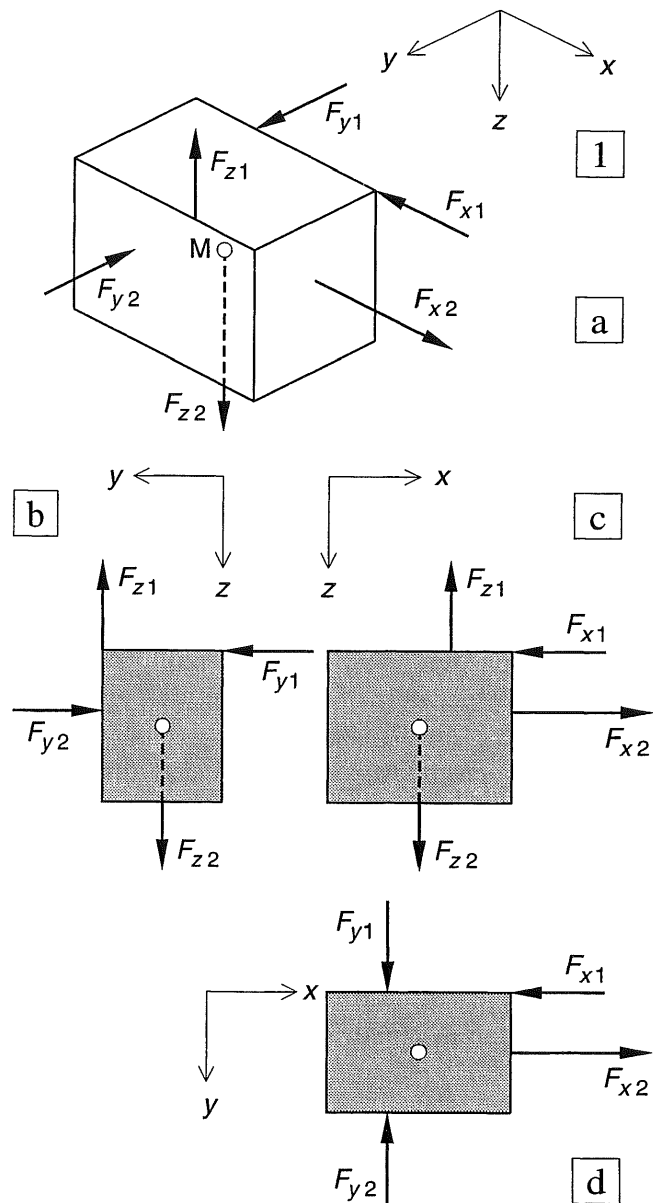


Fig. 1 Ruimtelijk lichaam onderworpen aan een aantal krachten (die niet in evenwicht zijn).

- Ruimtelijke weergave
- Projectie van alle krachten op het y - z -vlak, waarbij de krachten in x -richting wegvallen.
- Projectie van alle krachten op het x - z -vlak, waarbij de krachten in y -richting wegvallen.
- Projectie van alle krachten op het x - y -vlak, waarbij de krachten in z -richting wegvallen

3.3.6 BEGRIP STABILITEIT

Onder stabiliteit verstaat men het vermogen van een lichaam om weerstand te bieden aan een verstoring van de evenwichtstoestand, waarin het lichaam zich bevindt. In principe toetst men de stabiliteit door het beschouwde lichaam een kleine uitwijking te geven. Na het wegnemen van de daarvoor benodigde kracht, gaat men na of het lichaam wel of niet in de oorspronkelijke evenwichtsstand terugkeert.

Men kan de volgende drie vormen van evenwicht onderscheiden:

- *stabil evenwicht* : na een kleine verplaatsing keert het lichaam in de oorspronkelijke stand terug.
- *labiel evenwicht* : na een kleine verplaatsing verwijderd het lichaam zich steeds verder van de oorspronkelijke stand.
- *indifferent evenwicht* : na een kleine verplaatsing blijft het lichaam ook in de nieuwe stand in evenwicht.

Het klassieke voorbeeld ter illustratie van deze evenwichtstoestanden is de ligging van een kogeltje in het centrum van een hol oppervlak (stabil); een bol oppervlak (labiel); en een plat vlak (indifferent), zie fig. 2. Hoe groot we de uitwijking van het kogeltje in deze voorbeelden ook kiezen, het resultaat blijft hetzelfde. Ook de richting van de uitwijking doet niet ter zake. Dit is in tegenstelling met wat we bij bouwconstructies kunnen verwachten.

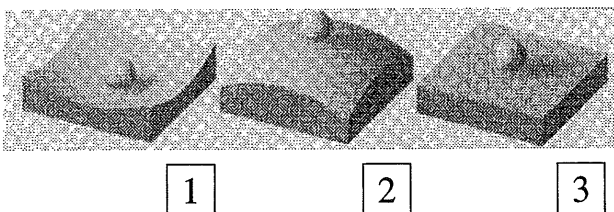


Fig. 2 Vormen van evenwicht
variant 1 stabiel evenwicht
variant 2 labiel evenwicht
variant 3 indifferent evenwicht

Fig. 3 Evenwicht bij bouwconstructies
variant 1a: 'safe' stabiel evenwicht
variant 1b: stabiel evenwicht dat gemakkelijk overgaat in labiel evenwicht
variant 1c: zeer stabiel evenwicht in x-richting; maar vrijwel labiel evenwicht in y-richting

Fig. 4 Blokafmetingen waarvoor het evenwicht volgens de varianten 1a-b-c geldt

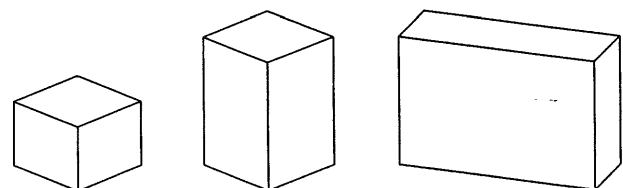
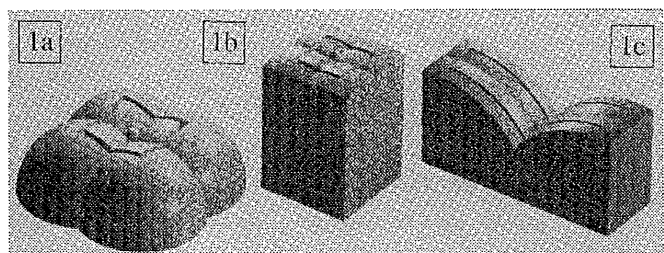
Stabiliteit bij bouwconstructies

Voor bouwconstructies zullen we dit beeld met een vierde variant moeten uitbreiden. We beschouwen nu het oppervlak dat is weergegeven in fig. 3, variant 1b. Bij een kleine uitwijking zal het kogeltje naar de oorspronkelijke stand terugkeren (stabil evenwicht). Maar bij een iets te grote uitwijking zal dit beslist niet meer gebeuren (labiel evenwicht).

In vele gevallen kan men er van uitgaan dat een dergelijk oppervlak een diepe 'dip' vertoont, zodat het kogeltje zijn evenwichtsstand nauwelijks wil verlaten (fig. 3, variant 1a). Maar de dip kan ook dermate ondiep zijn (fig. 3, variant 1b), dat zeer kleine krachten al een overgang van stabiel naar labiel evenwicht kunnen veroorzaken.

Bovendien kan de zaak sterk richtingsgevoelig zijn; volkomen stabiel in de ene richting maar loodrecht daarop vrijwel labiel. Bij variant 1c in fig. 3 is ook daarvan een beeld gegeven. Een fysieke verklaring van een en ander wordt verstrekt in [043].

In de navolgende paragrafen zal een en ander worden verduidelijkt aan de hand van evenwichtsbeschouwingen op blokvormige bouwonderdelen. In KW-3 'Standzekerheid' zullen we het extreme standpunt hanteren dat *wanden* in hun lengterichting volkomen stabiel en onverplaatsbaar zijn, maar loodrecht op hun lengterichting daarentegen volkomen labiel.



3.4.1 ZWAARTEPUNT BLOK

Ter bepaling van de gedachte zal het evenwicht worden onderzocht van een rechthoekig blok, dat een soortelijke massa ρ bezit (= massa per eenheid van volume). De aarde oefent hierop een kracht uit ter grootte, zie fig. 1 en 2:

$$F_V = blh * \rho g \quad (10)$$

In onze berekeningen zullen we alleen met deze resulterende verticale kracht werken. We moeten dan wel het aangrijpingspunt van deze kracht kennen. Een ieder zal willen accepteren dat dit aangrijpingspunt in het middelpunt M van het blok moet worden aangenomen, zie fig. 1 (snijpunt van de drie symmetrievlakken).

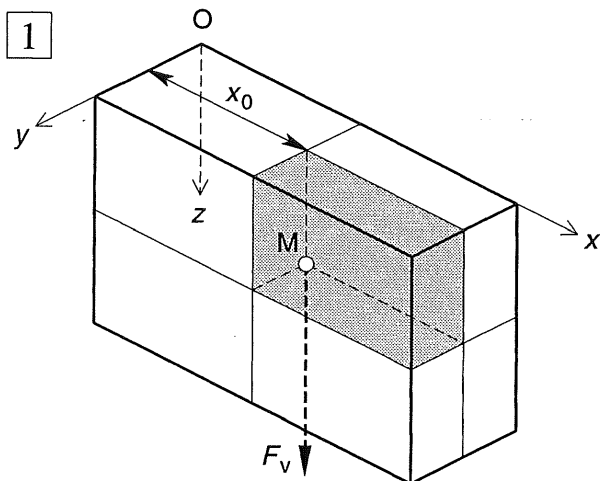


Fig. 1 Rechthoekig blok met zwaartepunt M

Voor evenwichtsbeschouwingen kan men zich het gehele gewicht (dus ook de resulterende kracht) in dit punt geconcentreerd denken. Dit zgn. *zwaartepunt* is dan tevens het aangrijpingspunt van de resulterende kracht.

Analytisch is dit aan te tonen door om drie loodrecht op elkaar staande assen het momenten-evenwicht op te maken. Door dit zowel voor de resulterende kracht te doen als voor de afzonderlijke volumekrachtjes, en de uitkomsten aan elkaar gelijk te stellen, volgt de reeds genoemde ligging van het zwaartepunt van het blok.

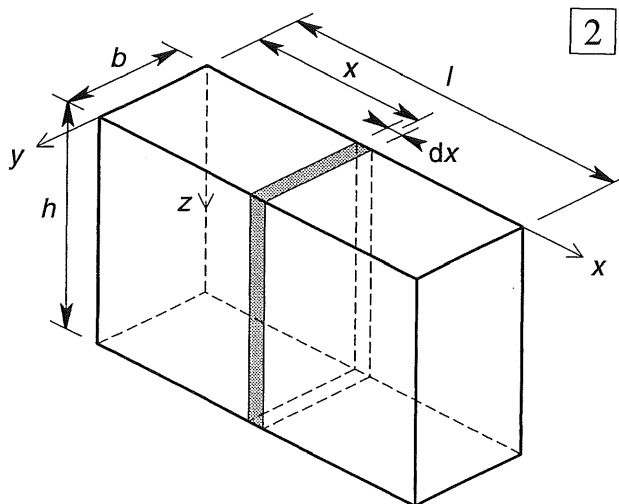


Fig. 2 Moment van een mootje van het blok om de y-as

□ *Analytische uitwerking*

Het bewijs wordt alleen voor de x-richting gegeven.

Gevraagd: de zwaartepuntsafstand x_0 , zie fig. 1

Het moment van de resulterende kracht F_V om de y-as is gelijk aan:

$$K = F_V x_0 = (bhl \rho g) x_0 \quad (11)$$

Om het moment van de volumekrachtjes om de y-as te bepalen, beschouwen we een mootje ter dikte dx en bepalen hiervan het statisch moment om de y-as, zie fig. 2.

Door integratie vinden we dan het statisch moment van het gehele blok.

$$\begin{aligned} K &= \int_0^l (bh \, dx \, \rho g) x = bh \, \rho g \int_0^l x \, dx = \\ &= \left[bh \, \rho g \frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{1}{2} bhl^2 \rho g \quad (12) \end{aligned}$$

Als we de uitdrukkingen (11) en (12) aan elkaar gelijk stellen volgt:

$$x_0 = l/2$$

Dit is de vergelijking van een plat vlak evenwijdig aan het y-z-vlak. Door het blok achtereenvolgens een kwart slag te draaien om de x-as en de y-as, volgt op overeenkomstige wijze de ligging van de andere twee symmetrievlakken. Over het algemeen wordt bij dergelijke berekeningen de factor ρg weggelaten, zodat de berekening is teruggebracht tot een zuiver geometrisch probleem.

3.4.2 WIJZE VAN ONDERSTEUNEN

Om de gedachte te bepalen denken we aan een blok met een behoorlijk gewicht, bijv. een blok van beton. Dit blok kan op allerlei manieren worden ondersteund, bijv. door een aantal blokjes van hardhout of staal, of door enkele latten of strippen. Het kan uiteraard ook rechtstreeks op een plat vlak worden geplaatst, bijv. op een betonvloer.

In fig. 3 is een drietal mogelijkheden voor de ondersteuning van het ondervlak van het blok weergegeven:

1. vier blokjes
2. twee strippen
3. het gehele ondervlak

In de gevallen 1. en 2. zijn de ondersteuningsvlakken klein ten opzichte van het oppervlak van het grondvlak. Dergelijke kleine ondersteuning worden in de berekening geschematiseerd. Bij de drie genoemde gevallen zullen we achtereenvolgens spreken van:

1. puntvormige ondersteuning
2. lijnvormige ondersteuning
3. een continue ondersteuning

In fig. 4 zijn de projecties van het blok op het x - z -vlak (a) en het y - z -vlak (b) weergegeven, tezamen met de geschematiseerde ondersteuningskrachten. Neem er goede nota van dat voor de projecties van de ondersteuningswijzen het volgende geldt:

	x - z -vlak (a)	y - z -vlak (b)
1.	puntvormig	puntvormig
2.	puntvormig	lijnvormig
3.	lijnvormig	lijnvormig

Dit houdt in dat in fig. 4 de projecties van 1a en 2a niet van elkaar zijn te onderscheiden; hetzelfde geldt voor de projecties van 2b en 3b.

Fig. 4 Projecties van het blok voor de gevallen 1, 2, 3.
a. op het x - z -vlak
b. op het y - z -vlak

De ondersteuning volgens fig. 3 zijn geschematiseerd weergegeven. Een gelijkmatig verdeelde tegendruk is hierbij uitgezet als kracht per lengte !

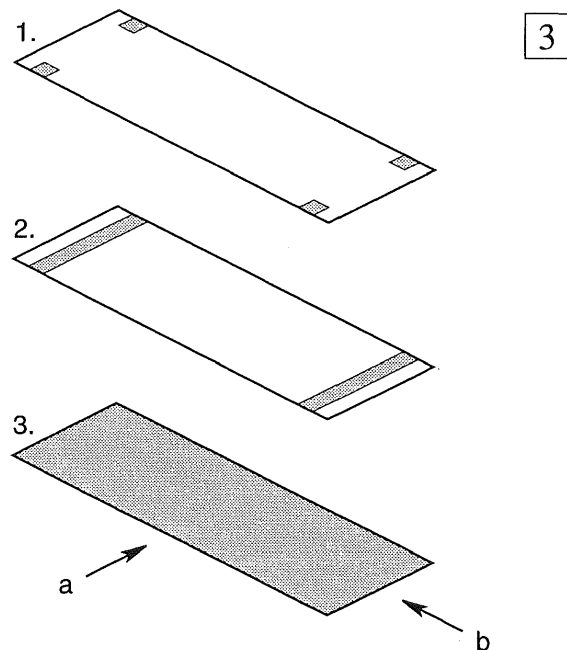
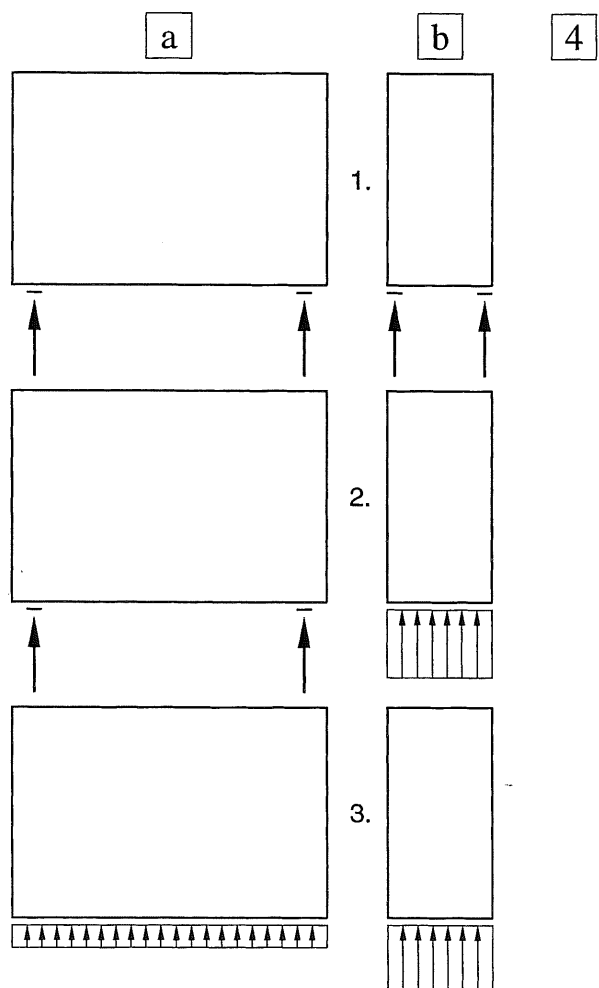


Fig. 3 Ondersteuning van het blok
1. puntvormig; 2. lijnvormig; 3. continu.



3.4.3 STARRE ONDERSTEUNING

Als een blok beton aan een dunne kabel of een koord wordt opgehangen, zal zo'n kabel of koord onder invloed van het gewicht van het blok iets uitrekken. Het koord blijkt zich te gedragen als een stijve veer en het blok is dus verend ondersteund, in feite dus verend opgehangen; fig. 1.

Over het algemeen zal zo'n blok echter aan de onderzijde worden ondersteund in een aantal punten dan wel over het gehele ondervlak.

Onder het gewicht van een betonnen blok zullen houten blokjes of latjes iets indrukken, bij staal is de indrukking verwaarloosbaar.

Bij plaatsing op een 'plat' vlak zullen de twee oppervlakken vrijwel nooit 'zuigend' op elkaar passen en kan zowel het blok als de vloer plaatselijk in zeer geringe mate vervormen.

In alle evenwichtsbeschouwingen in paragraaf 3.4 zal er echter van worden uitgegaan, dat het rechthoekige blok volkomen star en onvervormbaar is. Voorts wordt aangenomen dat de ondersteuning ten gevolge van de krachten die er op aangrijpen, evenmin zullen vervormen, zodat het blok ook geen zakkingen zal ondergaan. Men spreekt dan van *starre* ondersteuning.

In verreweg de meeste gevallen kunnen de vervormingen voor de bepaling van het evenwicht zonder meer worden verwaarloosd. Pas later in KW-6 zullen we zien dat de zakkingen van ondersteuning soms tot onaangename consequenties kunnen leiden. Een voorproefje hiervan komen we al tegen in [066-067].

2



Fig. 2 ... een koord van voldoende sterkte ... (O. Dicke)

1



Fig. 1 Bespreking van de kans dat het blok omlaag zal storten. (O. Dicke)

3

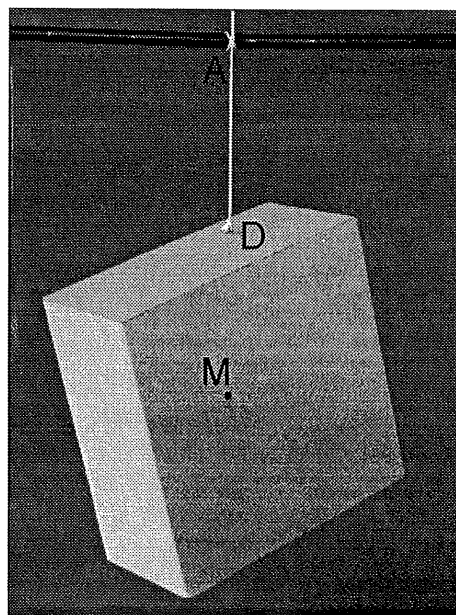


Fig. 3 Bij een willekeurig gekozen ophangpunt bevindt het zwaartepunt van het blok zich daar loodrecht onder.

3.4.4 ONDERSTEUNING VIA EEN KOORD

Als we een blok ophangen moeten we er zeker van zijn dat het koord voldoende sterkte bezit, zoals in de figuren 1 en 2 wordt bepleit.

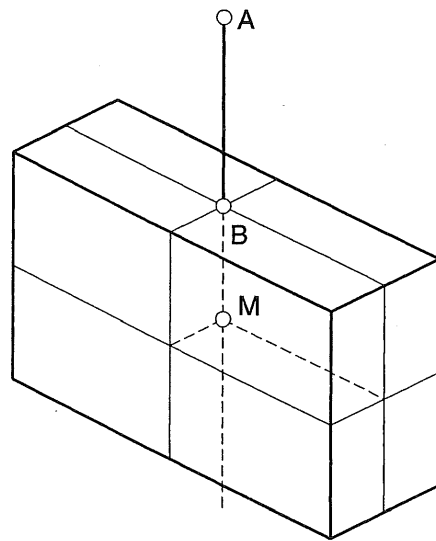
Als we het blok precies in het midden B van het bovenvlak opgehangen, zal het blok exact een horizontale positie moeten innemen, zie fig. 4. Alleen dan immers liggen de drie hierna genoemde punten op één en dezelfde verticale lijn en is evenwicht van krachten mogelijk.

Deze punten zijn, zie fig. 4:

A = het aangrijpingspunt van het koord aan de ondersteuning,

B = het aangrijpingspunt van het koord aan het blok,

M = het zwaartepunt van het blok.



4

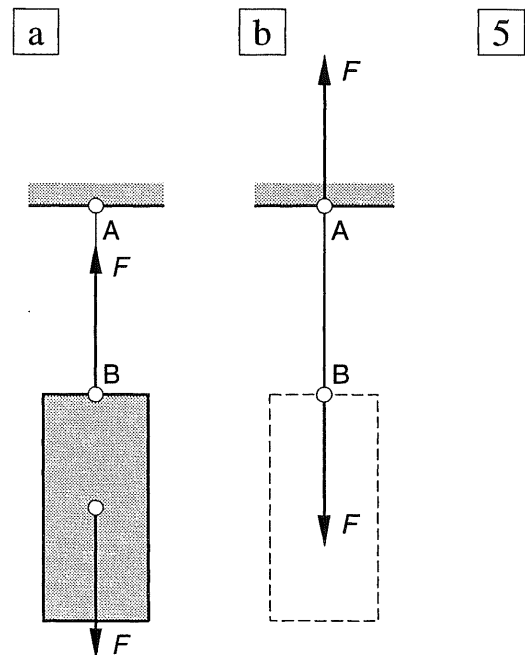
Fig. 4 Blok zodanig opgehangen aan een koord, dat het zich in een horizontale stand moet bevinden

In fig. 5a zijn de krachten weergegeven zoals die op het blok werken, en in fig. 5b de krachten zoals die op het koord werken. Neem er goede nota van hoe in punt B tussen blok en koord het beginsel *actie = reactie* wordt gehanteerd.

Indien het koord op een willekeurig punt aan de buitenomtrek van het blok wordt bevestigd, zal het blok een stand kiezen waarbij het zwaartepunt M van het blok zich loodrecht onder het ophangpunt D van het blok bevindt, zie fig. 3.

Punt D op zijn beurt moet zich weer loodrecht onder het ophangpunt A van het koord bevinden. Rotatie van het blok om de verticale as A-D is zonder meer mogelijk, in elke stand is het blok in indifferent evenwicht.

Zodra er horizontale krachten op het blok werken zal het in beweging komen en gaan slingeren. Hier houden we ons verder niet mee bezig. De belangrijkste conclusie is, dat er – ook bij een ondersteuning in één punt – een toestand van *stabiel* evenwicht optreedt als de ondersteuning maar *boven* het zwaartepunt van het blok ligt.



5

Fig. 5 Projectie van het blok op het y-z-vlak
a. krachten werkend op het blok
b. krachten werkend op het koord

3.4.5 STABIEL EN LABIEL EVENWICHT

Stabiel evenwicht

Om de verschillen tussen stabiel evenwicht en labiel evenwicht duidelijk te kunnen onderscheiden, zullen we het blok nu rechtstreeks via het *bovenvlak* aan een puntvormige ondersteuning bevestigen, dus zonder tussenkomst van een koord, zie fig. 1a. De toestand is dan te vergelijken met het schilderij aan een haakje [005].

We behandelen het als een twee-dimensionaal probleem. De 'puntvormige' ondersteuning in punt A wordt dan beschouwd als een lijnvormige ondersteuning loodrecht op het vlak van tekening (vergelijk fig [039-3-4]).

Als er vervolgens in punt M een horizontale kracht F_H op het blok wordt aangebracht zal het blok om het ophangpunt gaan roteren en ontstaat er een zijdelingse uitwijking, zie fig. 1b.

In het ophangpunt A zal dan een even grote horizontale kracht moeten ontstaan ($\sum F_x = 0$!). De resulterende 'actiekracht' schuin omlaag en de resulterende reactiekracht schuin omhoog, liggen in elkaars verlengde en maken evenwicht met elkaar. Na verwijdering van de horizontale kracht blijft er een koppel over dat het blok weer terug wil draaien in de oorspronkelijke stand, zie fig. 1c. Het blok verkeert dus in een toestand van *stabiel evenwicht*.

Labiel evenwicht

In dien we het blok precies in het midden van het *ondervlak* in één punt C ondersteunen, is er in principe weer evenwicht mogelijk, zie fig. 2a. Ook hier zullen we het getekende driehoekje weer beschouwen als een lijnvormige ondersteuning loodrecht op het vlak van tekening.

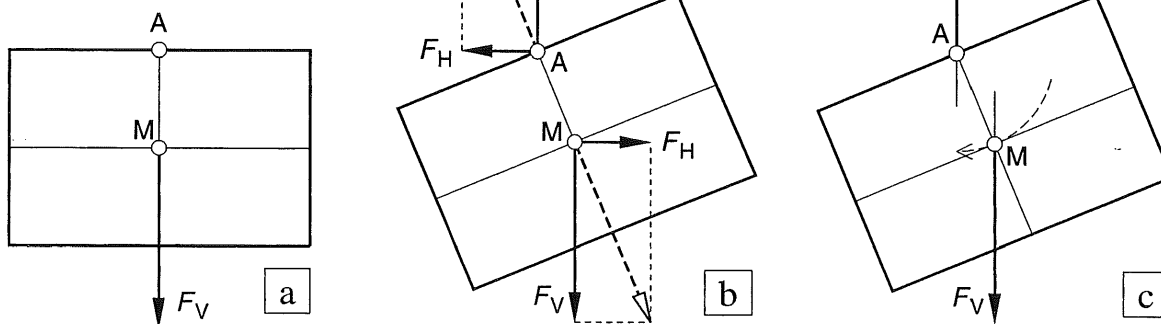
Het blok kan weer in een schuine stand in evenwicht worden gehouden door een horizontale kracht F_H . Ten opzichte van fig. 1 hebben de 'actiekrachten' en de 'reactiekrachten' hun plaats gewisseld, zie fig. 2b. Beide krachten liggen weer in elkaars verlengde, maar in punt M moet de kracht F_H het blok nu zijdelings steunen om het in evenwicht te houden.

Nemen we de steunende zijdelingse kracht F_H weg, dan zal het koppel dat door de overblijvende verticale krachten wordt veroorzaakt, de rotatie van het blok alleen maar vergroten, zodat het onherroepelijk van zijn oplegging zal vallen, zie fig. 2c. Het blok van fig. 2a verkeert dus in een toestand van *labiel evenwicht*.

Bij een bekende grootte van F_V en F_H ligt de scheefstand in fig. 1 en fig. 2 dus precies vast. Omgekeerd is bij een gegeven scheefstand de verhouding tussen F_H en F_V direct te bepalen.

Fig. 1 Stabiel evenwicht van een blok

- Blok opgehangen in punt A
- Blok in uitgeweken stand door het aanbrengen van een horizontale kracht F_H in punt M
- Ontstaan van een 'stabiliserend' koppel na het wegnemen van F_H (de stippellijn geeft de baan van het zwaartepunt aan)



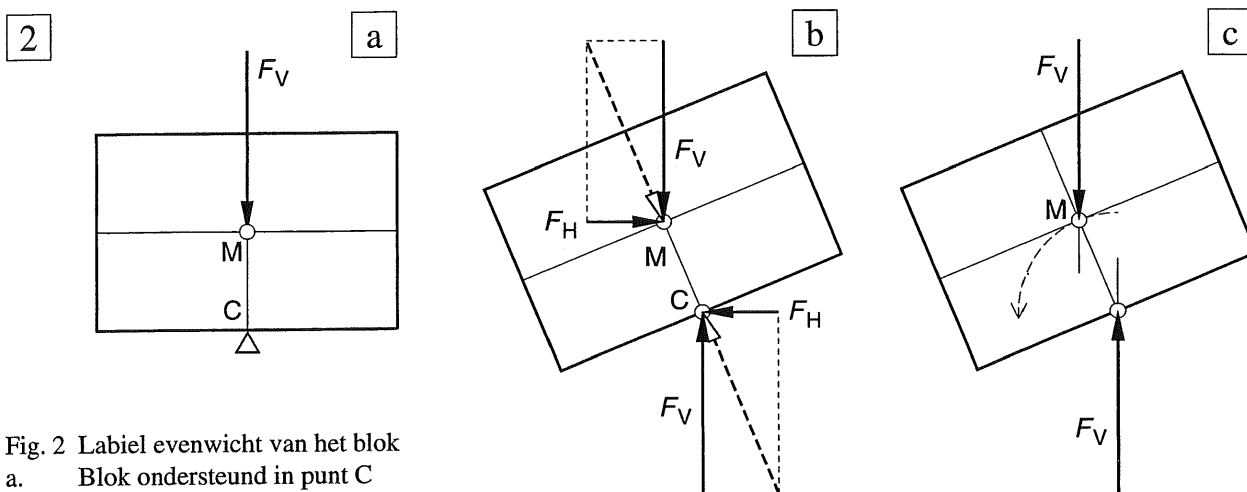


Fig. 2 Labiel evenwicht van het blok

- Blok ondersteund in punt C
- Na het geven van een kleine uitwijking is een horizontale kracht F_H nodig om het blok in evenwicht te houden
- Ontstaan van een 'destabiliserend' koppel na het wegnemen van F_H (de stippellijn geeft weer de baan van het zwaartepunt aan)

Overgang van stabiel naar labiel evenwicht

We zetten het blok nu overeind op een vlakke ondergrond, zodat het continu is ondersteund.

We brengen in de top een horizontale kracht aan waardoor het een stukje roteert om de rechter onderrand, zie fig. 3. Vervolgens halen we de hiervoor benodigde kracht weer weg.

Bij een kleine uitwijking keert het blok weer terug in zijn oorspronkelijke stand, maar bij een wat te grote uitwijking gebeurt dit niet meer, zoals in fig. 3, waar het blok zowel naar links als naar rechts kan kantelen.

Hoe smaller het blok is, des te eerder zal deze overgang van stabiel naar labiel evenwicht worden bereikt.

Bepalend voor de stabiliteit is de baan die het zwaartepunt van het blok beschrijft, bij het geven van een uitwijking. Gaat het omhoog, dan zal het zijn oorspronkelijke laagste stand weer willen hernemen. Gaat het omlaag, dan zal het deze beweging willen voortzetten.

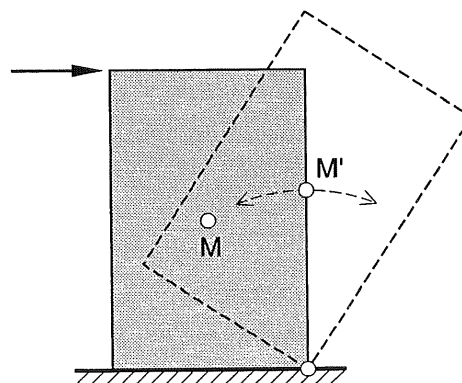
Fig. 3 Overgang van stabiel naar labiel evenwicht bij een blok dat continu is ondersteund. De stippellijn beschrijft de baan van het zwaartepunt

Bij de introductie van het begrip stabiliteit in [037] hebben we een kogeltje op een gebogen oppervlak een uitwijking gegeven en gecontroleerd of het zijn beginstand wel of niet zal hernemen.

Als we dit vergelijken met de voorbeelden van [042 en 043], dan kunnen we dergelijke gebogen vlakken beschouwen als de meetkundige plaats van alle banen die het zwaartepunt van een puntvormig ondersteund blok kan beschrijven.

De varianten 1 en 2 van fig. [037-2] beschrijven dan een ondersteuning van het blok in één punt, respectievelijk aan de boven- en aan de onderzijde.

De varianten van fig. [037-3] komen overeen met een continue ondersteuning door een plat vlak. De varianten 1a en 1b hebben resp. betrekking op een korte en een lange vierkante kolom die op een plat vlak staat, terwijl variant 1c betrekking heeft op een wand, waarvoor geldt: lengte \gg dikte, zie fig. [037-4]. Door deze blokken om een zijde of een hoekpunt te laten kantelen vinden we de getekende oppervlakken van fig. [037-3].



3.5.1 ONDERSTEUNING IN 3 PUNTEN

Het blok wordt op zijn kant gelegd en ondersteund in de punten A, B en C, zie fig. 1a.

De resultante van het eigen gewicht van het blok 'grijpt aan' in het middelpunt M van het blok en werkt verticaal omlaag, zie fig. 1b. In de punten A, B en C ontstaan oplegreacties die we verticaal omhoog gericht aannemen.

Met behulp van de formules (8a,b,c) en (9a,b,c) [036], zullen we dan de reactiekrachten moeten bepalen. Als uitsluitend een verticale *actiekracht* werkt en we ook van verticale *reactiekrachten* uitgaan, wordt aan de evenwichtsvoorwaarden (8a) en (8b) automatisch voldaan. Het momenten-evenwicht om de z-as levert ons evenmin iets op, omdat alle krachten evenwijdig zijn aan de z-as. De volgende evenwichtsvoorwaarden blijven dan over:

$$\sum F_z = 0 \quad (8c)$$

$$\sum K_x = 0 \quad (9a)$$

$$\sum K_y = 0 \quad (9b)$$

De drie bovenstaande evenwichtsvoorwaarden mogen op een overeenkomstige manier als bij de variant in [034] weer worden vervangen door drie 'momentenvoorwaarden'. Hierbij wordt het moment opgemaakt om drie willekeurig te kiezen lijnen n_1 , n_2 en n_3 , die in een horizontaal vlak liggen en niet door één punt mogen gaan. In formulevorm:

$$\sum K_{n1} = 0 \quad (13a)$$

$$\sum K_{n2} = 0 \quad (13b)$$

$$\sum K_{n3} = 0 \quad (13c)$$

Om de oplegreacties te bepalen kunnen we het beste gebruik maken van de formules (13). We maken dan (driemaal achtereenvolgens) het momentenevenwicht op om een lijn die door twee van de drie oplegpunten gaat en kunnen zo rechtstreeks de derde oplegreactie berekenen.

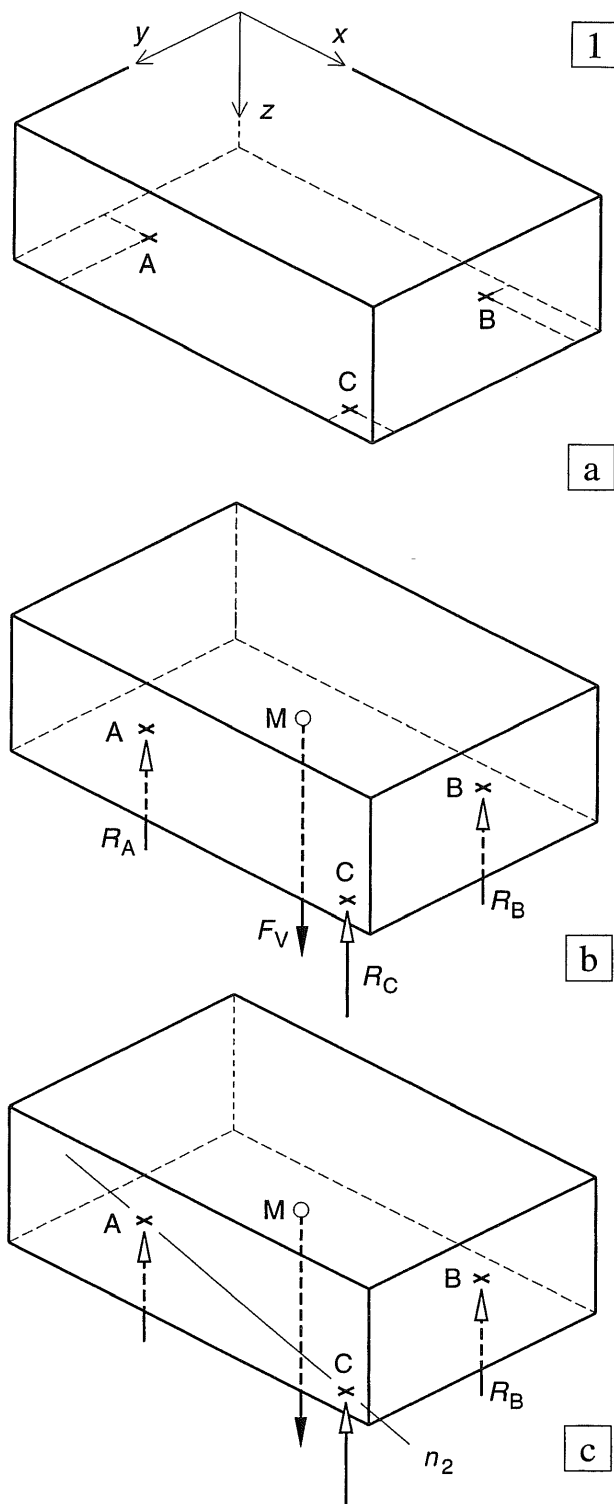


Fig. 1 Blok ondersteund in drie punten
 a. Perspectief
 b. Actiekracht en reactiekrachten
 c. Het statisch moment om de lijn n_2 levert de grootte van R_B

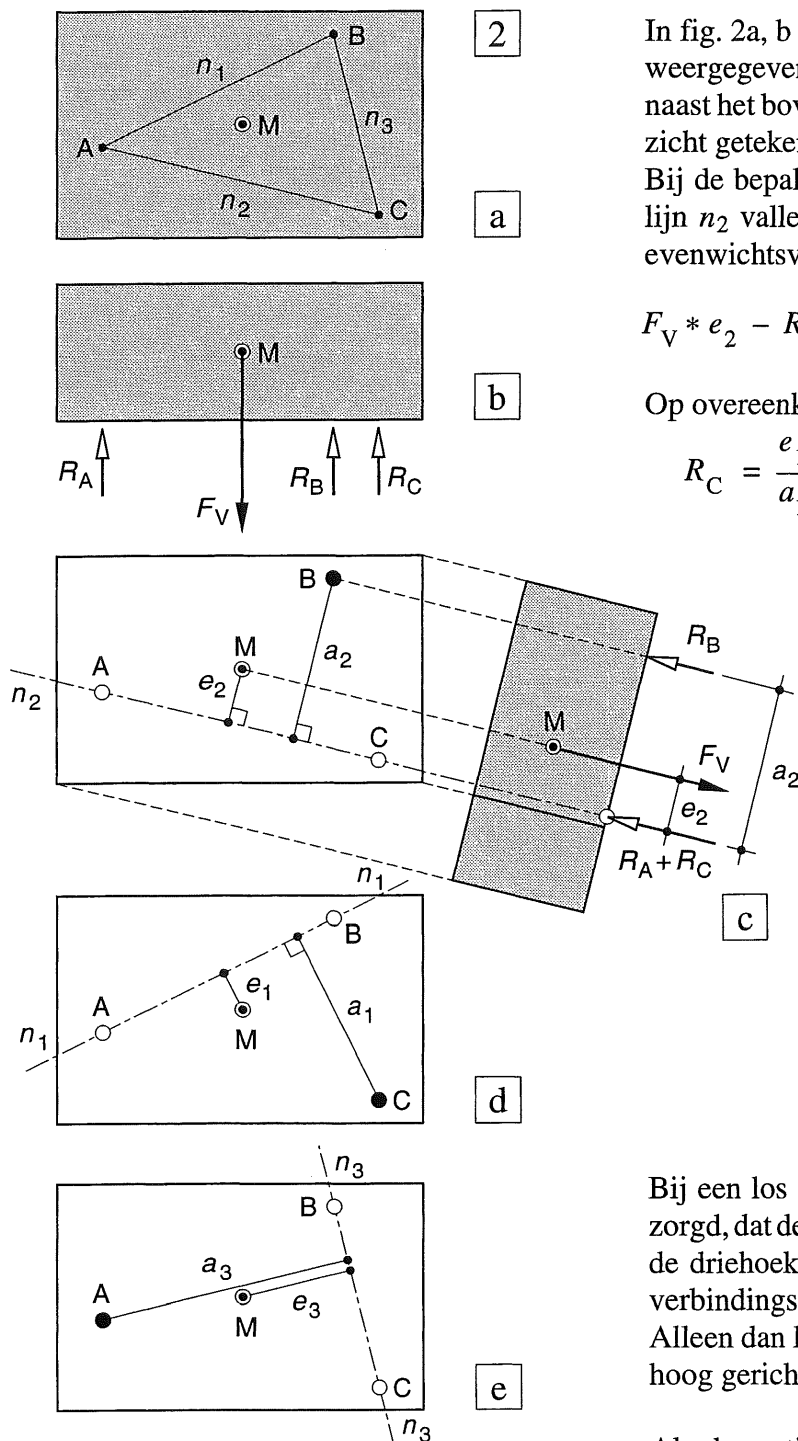


Fig. 2 Bepaling oplegreacties

a. Bovenaanzicht blok

b. Zijaanzicht blok

c. Projectie in de richting n_2 d. Bepaling R_C e. Bepaling R_A

Bij een berekening kunnen de afstanden e en a gewoon uit de figuur worden opgemeten.

Controle: $F_V = R_A + R_B + R_C$

In fig. 2a, b is het boven- en zijaanzicht van het blok weergegeven. Voor de bepaling van R_B is in fig. 2c naast het bovenaanzicht van het blok ook een zij-aanzicht getekend in de richting n_2 (lijn A-C).

Bij de bepaling van het momentenevenwicht om de lijn n_2 vallen de reacties R_A en R_C dan weg uit de evenwichtsvergelijking en er blijft over:

$$F_V * e_2 - R_B * a_2 = 0 \quad \text{ofwel,} \quad R_B = \frac{e_2}{a_2} F_V$$

Op overeenkomstige wijze volgt, zie fig. 2d en 2e:

$$R_C = \frac{e_1}{a_1} F_V \quad R_A = \frac{e_3}{a_3} F_V$$

Samengevat geldt dus:

Om een blok in het ondervlak op een stabiele wijze te kunnen ondersteunen zijn (minstens) drie steunpunten nodig. Bij een ondersteuning in drie punten liggen de verticale krachten in elk steunpunt eenduidig vast, zodat we hebben te doen met een statisch bepaalde wijze van opleggen.

Als we achtereenvolgens om elke lijn van de driehoek – gevormd door de verbindingslijnen van de drie steunpunten – het momenten-evenwicht opmaken, volgt de grootte van de daar tegenover liggende oplegreactie rechtstreeks.

Bij een los opgelegd blok moet er voor worden gezorgd, dat de verticale zwaartelij van het blok binnen de driehoek ABC blijft die wordt gevormd door de verbindingslijnen van de drie steunpunten, zie fig. 2a. Alleen dan leveren alle steunpunten immers een omhoog gerichte, dus steunende kracht aan het blok.

Als de verticale zwaartelij van het blok buiten de driehoek ABC ligt, dan zal één oplegreactie een negatieve waarde krijgen. Als er geen voorzorgsmaatregelen zijn getroffen om deze trekkracht door de ondersteuning te laten opnemen, dan roteert het blok om de twee andere ondersteuningspunten tot het ergens een derde steunpunt vindt. Gebeurt dit niet, dan valt het blok van zijn opleggingen.

3.5.2 VOORBEELDEN

Een café-tafeltje met drie poten is altijd stabiel ondersteund en het zwaartepunt van het tafeltje ten gevolge van het eigen gewicht ligt binnen de ondersteuningspunten die de poten met de vloer vormen. Als iemand echter op de rand van het tafeltje gaat zitten, kan het zeer wel voorkomen dat het tafeltje met persoon en verdere consumpties omkiept. Het rechtsdraaiend moment van de betreffende persoon is dan kennelijk groter dan het linksdraaiende moment van het tafeltje met de andere zich daarop bevindende voorwerpen. Bij barkruks treden overeenkomstige verschijnselen op, zie fig. 1.

Zeer bekend uit café's is ook de tafel met vier poten waarvan er één wat te kort is. Als de belasting op de tafel maar iets wordt gewijzigd, gaat de tafel van de ene stabiele toestand met drie ondersteuning over in de andere stabiele toestand met drie ondersteuning. De tafel wiebelt, een over het algemeen hinderlijke ervaring.

Als de vier poten van de tafel wel even lang zijn, hebben we maar drie evenwichtsvergelijkingen ter beschikking om de vier onbekende oplegreacties te bepalen. Dat lukt dus niet.

Het is echter zeer gebruikelijk om aan te nemen dat het eigen gewicht van de tafel dan gelijk over de vier poten is verdeeld, zie fig. 2b. Er wordt dan in ieder geval aan het evenwicht voldaan. Zetten we een gewicht precies in het midden van de tafel, dan mogen we aannemen dat dit gewicht ook gelijk over de vier poten zal worden verdeeld.

Als we van deze tafel echter één poot weer inkorten, dan wordt het gewicht niet langer gelijkmatig over de drie andere poten verdeeld. De poot die tegenover de ingekorte poot ligt, neemt dan namelijk ook geen reactie meer op. Dit volgt direct als men het evenwicht opmaakt om de diagonaal van het tafelblad, zie fig. 2c. De werklijn van de resulterende verticale kracht gaat door deze lijn en levert dus een moment dat gelijk is aan nul. Dit houdt in dat ook de poot schuin tegenover de ingekorte poot een kracht nul zal moeten leveren, want anders kan niet aan het momenten-evenwicht worden voldaan.

Ziet men dit niet direct, dan kan men ook formeler te werk gaan en het momenten-evenwicht opmaken om drie lijnen die niet door één punt gaan, bijv. de assen n_1 , n_2 en n_3 van fig. 2b.

Het ligt uiteraard niet in de bedoeling om evenwichtsbeschouwingen voor tafels met vier poten verder te ontwikkelen, maar confrontatie met algemeen bekende mini-problemen kan wel verhelderend voor het inzicht zijn.



Fig. 1 De verticale zwaartelij van de belasting moet binnen de driehoek blijven waar de drie poten contact met de vloer maken (O. Dicke)

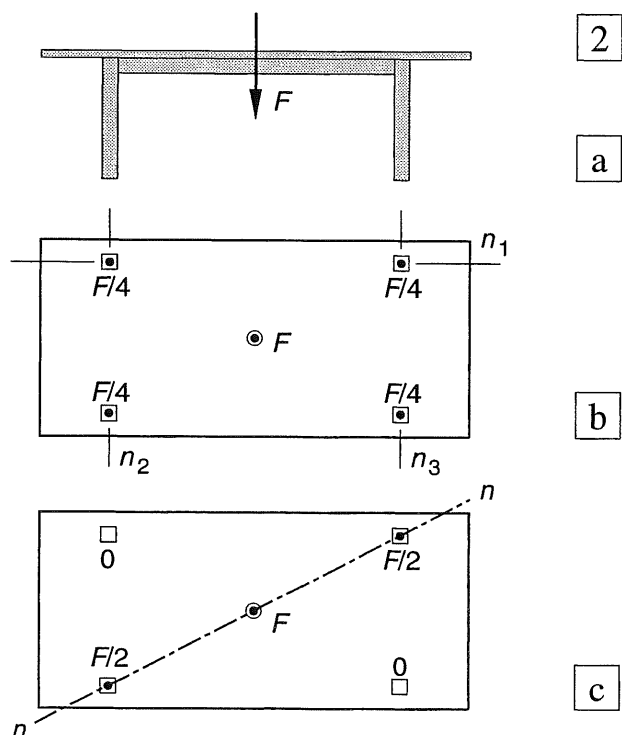


Fig. 2 Evenwicht tafel
 a. Zij aanzicht
 b. Gewicht gelijkmatig verdeeld over vier (even lange) poten
 c. Gewicht gelijk verdeeld over twee poten, als één poot te kort is

3.5.3 WRIJVING BIJ EEN HORIZONTAAL CONTACTVLAK

Als een rechthoekig blok op een horizontaal plat vlak wordt geplaatst, dan zal de resultante van de tegendruk R_V vanuit dit platte vlak door het zwaartepunt van het blok moeten gaan; fig. 3a. Het is algemeen gebruikelijk om aan te nemen dat deze tegendruk gelijkmatig over het ondervlak van het blok is verdeeld. Afhankelijk van de vlakheid van beide oppervlakken zal de tegendruk over een eindig aantal punten zijn verdeeld, waarbij in ieder geval moet gelden $n \geq 3$.

Als we het rechthoekige blok over het platte vlak willen verschuiven dan ontstaan in het contactvlak horizontale krachten. Deze werken op het blok in een richting die tegengesteld is aan de verschuivingsrichting. In eerste instantie zullen deze krachten het in beweging komen van het blok tegengaan. In fig. 3b is een horizontale kracht F_H op het blok aangebracht. De resultante F van F_H en F_V is dan gemakkelijk te bepalen, evenals de daardoor veroorzaakte reactiekracht R , die uiteraard even groot moet zijn als F en tegengesteld gericht.

Bij wrijvingsverschijnselen spreken we van de normaalkracht F_n loodrecht op het contactvlak ($n =$ normaal), en de schuifkracht F_t evenwijdig aan dit vlak ($t =$ tangentiaal), zie fig. 3b.

Voor een horizontaal vlak geldt dan:

$$F_n = F_V \text{ en } F_t = F_H$$

Pas als de uitgeoefende horizontale kracht een bepaalde waarde overschrijdt, zal het blok in beweging komen. Deze kracht noemen we de maximale wrijvingsweerstand $F_{t \max}$.

De maximale wrijvingskracht hangt af van het materiaal en de ruwheid van beide oppervlakken en is in ieder geval evenredig met de kracht F_n die beide voorwerpen op elkaar uitoefenen. De verhouding tussen beide krachten wordt aangeduid als de wrijvingscoëfficiënt μ .

$$\mu = F_{t \max} / F_n \quad (14)$$

Indien geldt dat $F_t \leq F_{t \max}$ dan zal het blok in rust blijven. Wordt de waarde $F_{t \max}$ overschreden, dan komt het blok in beweging. Tijdens het bewegen blijft de wrijvingskracht tegengesteld aan de relatieve bewegingsrichting, maar neemt iets in grootte af. Als de uitwendige horizontale kracht onveranderd blijft, zal het blok dus niet uit zichzelf tot stilstand komen.

Voorbeeld

We plaatsen een betonblok op een gladde vloer, waarbij de wrijvingscoëfficiënt gelijk is aan: $\mu \approx 0,4$.

Het volumegewicht van beton bedraagt:

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$$

Een blok met een inhoud van 1 m^3 brengt dan een kracht van 24 kN over op de ondergrond en om het blok horizontaal te verplaatsen is een kracht nodig ter grootte:

$$F_h \approx 0,4 * 24 = 9,6 \text{ kN}$$

De richting waarin we het blok willen verschuiven doet hierbij niet ter zake, en evenmin of het blok volledig passend op de vloer rust, of door kleine oneffenheden slechts op een beperkt aantal punten.

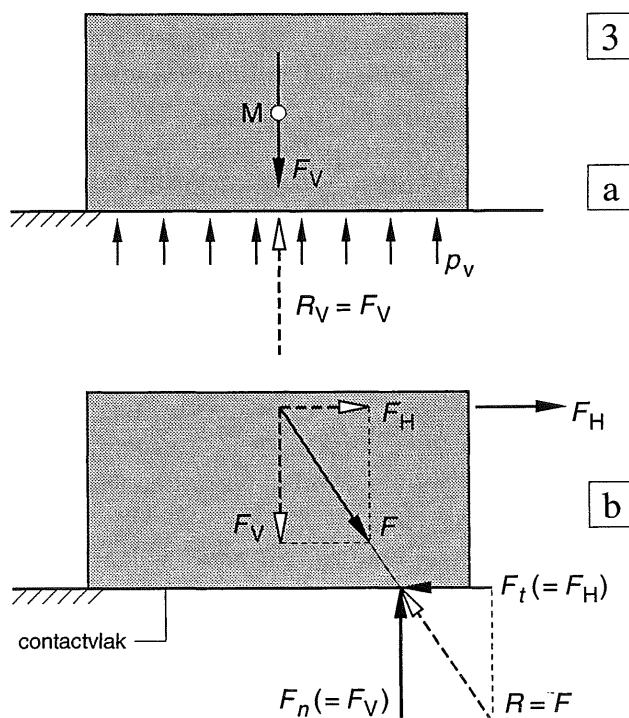


Fig. 3 Resulterende actiekrachten en reactiekrachten
 a. Alleen eigen gewicht: F_V
 b. Eigen gewicht + horizontale kracht: $F_V + F_H$
 Beweging treedt op als $F_H > F_{t \max} = \mu F_V$

3.5.4 WRIJVING BIJ EEN HELLEND CONTACTVLAK

Plaatst men het blok op een hellend vlak dan zal het blok boven een bepaalde helling vanzelf gaan schuiven. Om dit te voorkomen moet worden voldaan aan de volgende voorwaarde:

$$\operatorname{tg} \alpha < \mu \quad (15)$$

De afleiding verloopt als volgt:

Het blok ligt op een hellend vlak dat een hoek α maakt met de horizontaal, zie fig. 1a. De verticale werklijn van de resultante van het eigen gewicht (dus de kracht F_V) van het blok gaat door het zwaartepunt M van het blok en snijdt het hellend vlak in een punt S.

We ontbinden F_V in een component F_n , loodrecht op het contactvlak en een component F_t , liggend in het contactvlak. Hierbij geldt:

$$F_n = F_V \cos \alpha \quad (16a)$$

$$F_t = F_V \sin \alpha \quad (16b)$$

In dit stadium kunnen we nog niet zeggen, hoe de tegendruk over het ondersteuningsvlak is verdeeld. Hierover kunnen pas in [062] uitspraken worden gedaan.

Zolang het blok niet in beweging komt, zal de reactiekracht, die evenwicht maakt met het gewicht van het blok, gelijk en tegengesteld gericht moeten zijn aan F_V . De werklijnen van beide krachten moeten uiteraard samenvallen.

De reactiekracht wordt eveneens ontbonden in F_n en F_t , zie fig. 1b. Voor de normale drukkracht F_n en de schuifkracht F_t tussen blok en ondersteuningsvlak vinden we weer dezelfde formules (16a) en (16b).

Om beweging te voorkomen, moet volgens formule [047-(14)] gelden:

$$F_t / F_n < \mu \quad (17)$$

Substitutie van (16a) en (16b) in (17) levert dan:

$$\frac{F_V \sin \alpha}{F_V \cos \alpha} < \mu \quad \text{ofwel} \quad \operatorname{tg} \alpha < \mu \quad (15)$$

Wrijvingskrachten zijn er ook de oorzaak van dat alle voorwerpen in een huiskamer op hun plaats blijven. Voor het verschuiven van een kopje of een boek behoeven maar geringe horizontale krachten te worden geleverd. Voor het verplaatsen van een piano of een geheel gevulde boekenkast zijn deze krachten echter zo groot, dat we laatstgenoemde meubelstukken in het dagelijks gebruik als onverplaatsbaar kunnen beschouwen.

Rollende wrijving

Bij een onderlinge verschuiving van lichamen spreekt men van glijdende wrijving. Maar ook een rollend lichaam (bal) ondervindt wrijvingskrachten van de grond (en bij snel bewegende lichamen ook van de lucht).

De krachten die bij rollende wrijving optreden, zijn *aanmerkelijk* kleiner dan die bij glijdende wrijving. We zullen de rollende wrijvingskracht in het vervolg altijd gelijk stellen aan nul.

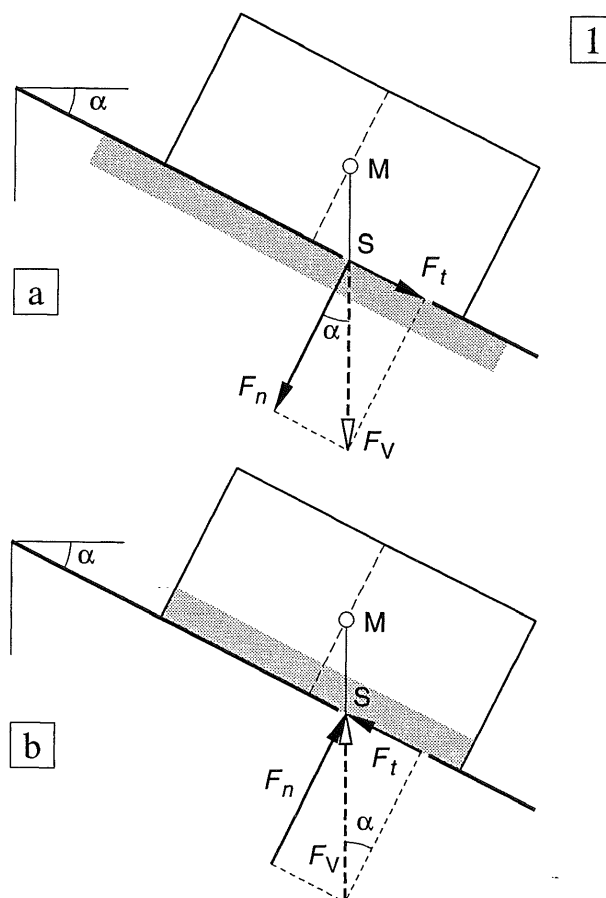


Fig. 1 Wrijvingskrachten bij een hellend contactvlak
a. Krachten op de ondersteuning
b. Krachten op het blok

3.6.1 ALGEMEEN

We beschouwen hetzelfde blok als voorheen dat nu echter recht overeind is gezet. Als zo'n blok los op de ondersteuning wordt geplaatst, kunnen alleen maar horizontale belastingen worden afgevoerd als door het eigen gewicht van het blok ook wrijvingskrachten worden opgewekt.

De invloeden van de verticale en de horizontale belastingen zullen eerst afzonderlijk worden beschouwd en later pas gecombineerd.

Voor de *berekening* is het dan wel nodig om aan te nemen dat in verticale richting zowel trekkrachten als drukkrachten door de ondersteuning kunnen worden geleverd.

Indien beide belastinggevallen moeten worden opgeteld (gesuperponeerd), zal voor de verticale belastingen de index 1 worden gebruikt en voor de horizontale belastingen de index 2. Voor de superpositie van beide gevallen wordt zonder index gewerkt.

3.6.2 ALLEEN VERTICALE BELASTING

Ter bepaling van de gedachte wordt uitgegaan van een rechthoekig blok dat in drie punten is ondersteund, zodat de verticale oplegreacties eenduidig vastliggen, zie fig. 2a. Zoals gemakkelijk is na te gaan bedragen deze:

$$R_{AV} = 0,50 F_V$$

$$R_{B'V} = R_{B''V} = 0,25 F_V$$

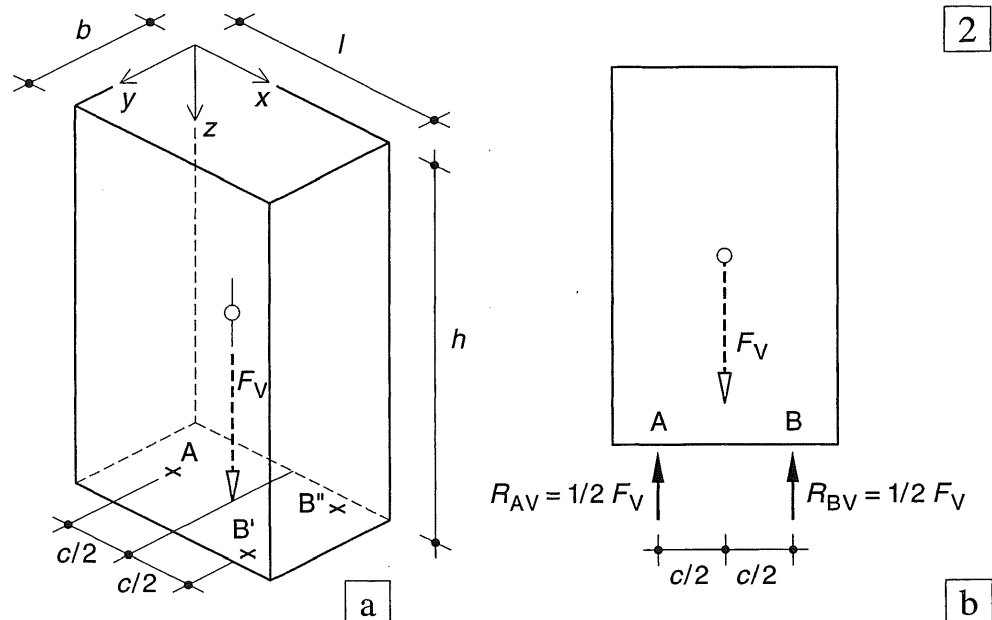
Als we het blok met de daarop werkende krachten op het x - z -vlak projecteren, vallen de oplegreacties $R_{B'V}$ en $R_{B''V}$ samen en kunnen we van het volgende schema uitgaan, zie fig. 2b.

$$R_{AV} = 0,50 F_V \quad (18a)$$

$$R_{BV} = 0,50 F_V \quad (18b)$$

Dit schema blijft onveranderd als we de drie puntvormige ondersteuning vervangen door twee lijnvormige ondersteuning bij A en B, beide loodrecht op het vlak van tekening.

Vergelijk hiertoe fig. [039-3-4].



Gewicht blok:

$$F_V = b l h * \rho g = 0,3 * 0,5 * 0,8 * 2400 * 10 = 2880 \text{ N}$$

Gebruikelijker is:

$$F_V = b l h * \gamma = 0,3 * 0,5 * 0,8 * 24 = 2,88 \text{ kN}$$

Fig. 2 Star ondersteund blok

- Ondersteuning in drie punten: A, B', B''
- Blok met reactiekrachten geprojecteerd op het x - z -vlak

3.6.3 ALLEEN HORIZONTALE BELASTING

Op het linker zijvlak van het blok laten we een horizontale kracht F_H aangrijpen, zie fig. 1a. Deze kracht ligt in het verticale symmetrievlak van het blok, op een afstand z_0 boven de ondersteuning.

We beschouwen allereerst de uitwerking van F_H alléén en nemen het eigen gewicht van het blok nog niet expliciet in de berekening op.

We weten echter wel dat door het eigen gewicht van het blok, de opleggingen in staat zijn om horizontale wrijvingskrachten te leveren.

Deze geven we aan met R_{AH} en R_{BH} , zie fig. 1b. Verder worden door F_H ook verticale reactiekrachten opgewekt: R_{AV} en R_{BV} .

Gemakshalve nemen we aan dat beide oplegreacties omhoog zijn gericht volgens fig. 1b. Als in fig. 1b het momenten-evenwicht wordt opge maakt om punt A, dan vallen de krachten R_{AV} , R_{AH} en R_{BH} weg uit de vergelijking en volgt:

$$+ F_H * z_0 - R_{BV} * c = 0, \text{ zodat}$$

$$R_{BV} = + \frac{z_0}{c} F_H \quad (19b)$$

Uit het momentenevenwicht om punt B volgt:

$$+ F_H * z_0 + R_{AV} * c = 0, \text{ zodat}$$

$$R_{AV} = - \frac{z_0}{c} F_H \quad (19a)$$

De verticale oplegreacties blijken even groot te zijn maar tegengesteld gericht, zoals in fig. 1c is weergegeven. Hierdoor wordt dus voldaan aan de evenwichtsvoorwaarde:

$$\Sigma F_z = 0.$$

Uit de voorwaarde $\Sigma F_x = 0$ volgt:

$$+ F_H - R_{AH} - R_{BH} = 0, \text{ zodat}$$

$$+ R_{AH} + R_{BH} = F_H \quad (20)$$

De horizontale componenten van de oplegreacties maken samen evenwicht met de horizontale kracht. Over de verdeling van F_H over R_{AH} en R_{BH} kan geen uitsluitel worden gegeven.

Als echter blijkt dat geldt:

$$F_H = (R_{AH} + R_{BH}) > \mu F_V \quad (21)$$

dan volgt uit formule [048-(17)], dat het blok van zijn opleggingen zal schuiven.

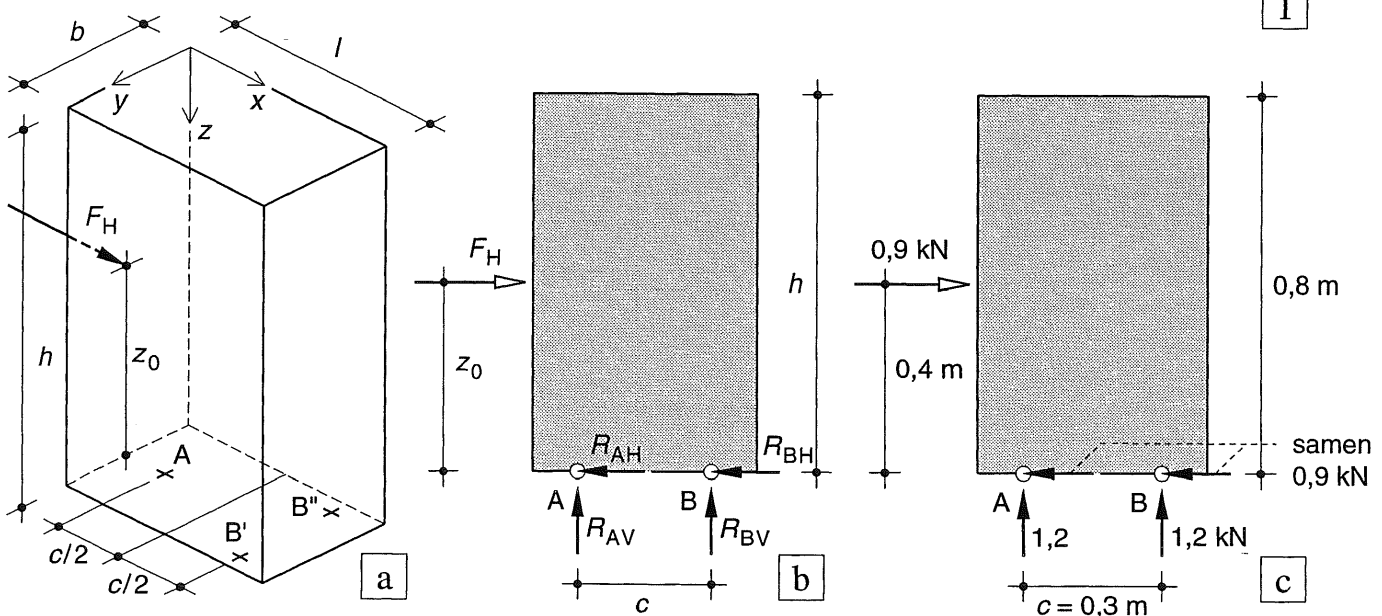


Fig. 1 Blok onder invloed van uitsluitend een horizontale kracht F_H
a. Blok in perspectief

b. Actie- en reactiekrachten in symbolen
c. Numerieke uitwerking, zie [051]

3.6.4 VERTICALE EN HORIZONTALE BELASTING TEZAMEN

Indien de verticale en horizontale belasting tezamen aangrijpen, volgt voor de verticale oplegreacties, zie [049-(18)] en [050-(19)]:

$$\begin{aligned} R_{AV} &= (R_{AV})_1 + (R_{AV})_2 = \\ &= \frac{1}{2} F_V - \frac{z_0}{c} F_H \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} R_{BV} &= (R_{BV})_1 + (R_{BV})_2 = \\ &= \frac{1}{2} F_V + \frac{z_0}{c} F_H \end{aligned} \quad (22b)$$

Uit de formules blijkt dat – bij een naar rechts gerichte horizontale kracht – de rechter oplegreactie R_{BV} altijd een positieve waarde heeft, dus omhoog is gericht zoals in de tekening is aangegeven, maar dat de linker oplegreactie R_{AV} negatief wordt als geldt:

$$F_H * z_0 > F_V * c/2 \quad (23a)$$

Beschouwen we formule (23a) dan staat in het linkerlid het rechtsdraaiend moment van de horizontale kracht ten opzichte van punt B en in het rechterlid het linksdraaiend moment van de resultante van het eigen gewicht ten opzichte van punt B.

Evenwicht is dan alleen maar mogelijk als de linker oplegging in staat is trekkrachten op te nemen, bijv. doordat het blok niet los is opgelegd maar met een kabel aan de ondersteuning is bevestigd.

NUMERIEKE UITWERKING

Alleen een verticale kracht

Gewicht blok: $F_V = 2,88$ kN (zie fig. [049-2])
Oplegreacties R_{AV} en R_{BV} elk 1,44 kN

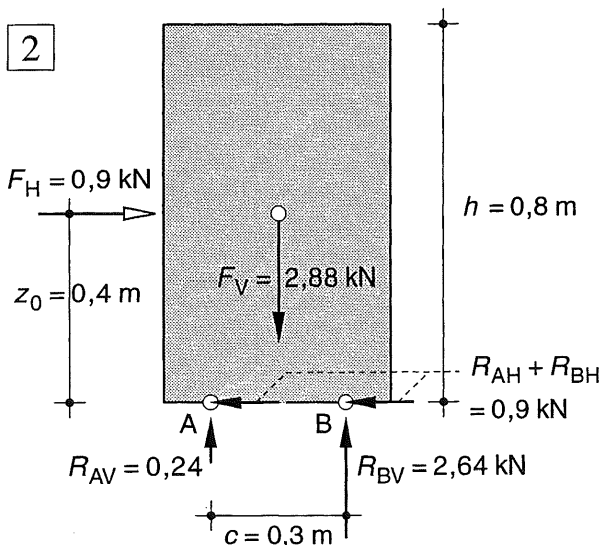


Fig. 2 Oplegreacties ten gevolge van een horizontale en een verticale kracht tezamen

Alleen een horizontale kracht

$F_H = 0,9$ kN,

$z_0 = h/2 = 0,4$ m, $c = 0,3$ m

We nemen R_{AV} direct in de goede richting aan, dus omlaag gericht en R_{BV} omhoog gericht, zie fig. 1c. Vervolgens maken we het moment op om punt B:

$$+ F_H * z_0 - R_{AV} * c = 0$$

$$+ 0,9 * 0,4 - R_{AV} * 0,3 = 0$$

$$R_{AV} = 1,2 \text{ kN} \quad R_{BV} = 1,2 \text{ kN}$$

$$R_{AH} + R_{BH} = 0,9 \text{ kN}$$

Verticale en horizontale kracht tezamen

We kunnen de twee voorgaande uitkomsten natuurlijk gewoon optellen, maar in een gegeven geval is het gebruikelijker om gelijk alle krachten in één berekening op te nemen. Aangezien we vermoeden dat de oplegreactie R_{AV} in dit geval omhoog zal werken tekenen we hem ook in die richting, zie fig. 2. Maken we weer het moment op om punt B dan volgt:

$$+ F_H * z_0 - F_V * c/2 + R_{AV} * c = 0$$

$$0,9 * 0,4 - 2,88 * 0,15 + R_{AV} * 0,3 = 0$$

$$R_{AV} = (-0,36 + 0,432) / 0,3 = 0,24 \text{ kN}$$

$$R_{BV} = 2,88 - 0,24 = 2,64 \text{ kN}$$

$$R_{AH} + R_{BH} = 0,9 \text{ kN}$$

3.6.5 KANTELEN EN VERSCHUIVEN

Als het blok uit [051] los is opgelegd zal het kantelen om punt B, zodra de verticale trekkracht in punt A ten gevolge van de horizontale belasting, groter is dan de verticale drukkracht in punt A ten gevolge van de verticale belasting.

Uit formule [051-(23a)] volgt dan dat op het ogenblik van kantelen geldt:

$$\frac{F_H}{F_V} = \frac{0,5 c}{z_0} \quad (23b)$$

Uit fig. 1a volgt dan: de resultante van F_H en F_V gaat precies door het oplegpunt B (in feite dus door de lijn B'-B'' die loodrecht staat op het vlak van tekening, zoals is weergegeven in fig. 2). De oplegreactie R_B is dan gelijk en tegengesteld gericht aan de resulterende actiekracht F en de oplegreactie R_A is gelijk aan nul.

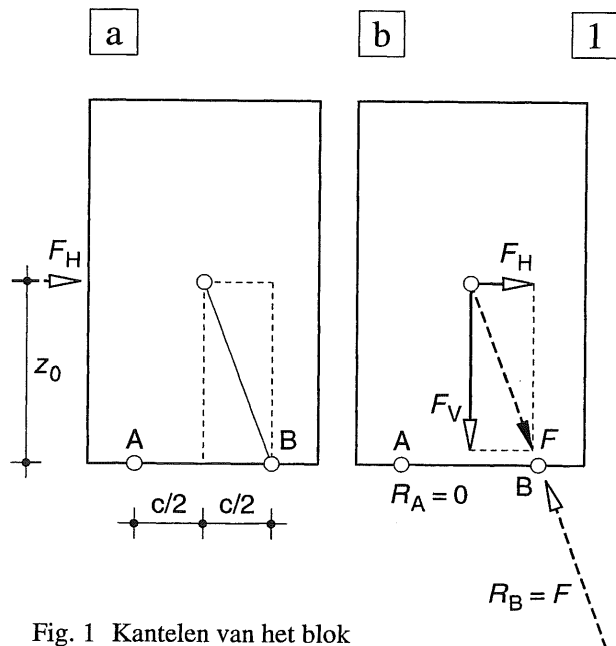


Fig. 1 Kantelen van het blok
a. Blok in vooraanzicht
b. Evenwicht van krachten

Numerieke uitwerking

Gegeven: (zie fig. 2)

Blok van beton: $b \times l \times h = 0,3 \times 0,5 \times 0,8 \text{ m}^3$

$F_V = 0,3 \times 0,5 \times 0,8 \times 24 = 2,88 \text{ kN}$

$R_{AV} = R_{BV} = 1,44 \text{ kN}$

afstand van de opleggingen: $c = 0,3 \text{ m}$

In het midden van het linkzijdvlak grijpt een horizontale puntlast aan (dus $z_0 = 0,5 h = 0,4 \text{ m}$)

Gevraagd:

Bij welke horizontale kracht het blok zal kantelen.

Oplossing:

Op het ogenblik van kantelen is de verticale oplegreactie R_{AV} juist gelijk aan nul. Maken we het statisch moment op om de lijn B'-B'' dan moet dus gelden:

$$+ F_H * h/2 - F_V * c/2 = 0 \text{ ofwel}$$

$$+ F_H * 0,4 = 2,88 * 0,15 \text{ hieruit volgt:}$$

$$F_H = 1,08 \text{ kN}$$

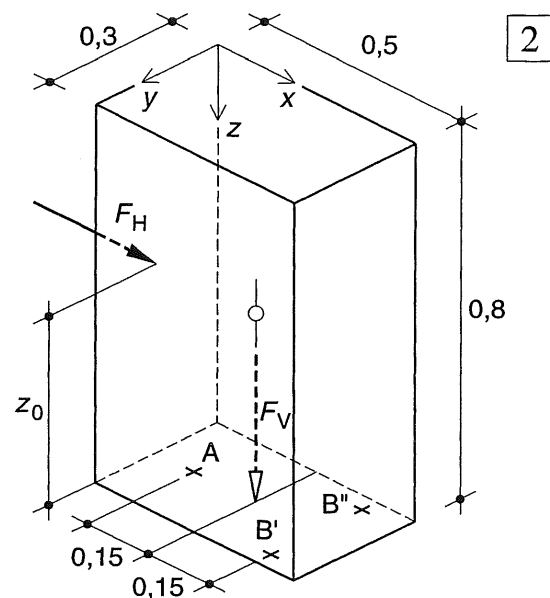


Fig. 2 Bepaling van de grootte van de horizontale kracht waarbij het blok zal kantelen

Stabiele stand van het blok

Voor een stabiele stand van het blok geldt de volgende voorwaarde: de werklijn van de resultante van alle op het blok werkende 'actiekrachten' moet het ondersteuningsvlak van het blok snijden binnen de driehoek die wordt gevormd door de verbindingslijnen van de drie steunpunten, zie hiervoor fig. [045-2a]. In fig. 3a is dit gebied gerasterd weergegeven.

Op het ogenblik van kantelen, zoals besproken in [051], gaat de werklijn van de resulterende kracht juist door het open rondje van fig. 3a.

Als het blok echter op meer dan drie punten wordt ondersteund, dan zal de resultante moeten liggen binnen de grootste veelhoek die met deze punten als hoekpunten kan worden beschreven. Lijnvormige ondersteuning kunnen we beschouwen als een samenstel van puntvormige ondersteuning. De twee lijnvormige ondersteuning volgens fig. 3b zijn dus veel effectiever dan de drie puntvormige ondersteuning volgens fig. 3a.

Evenwichtsvoorwaarden voor het blok

Als het blok in evenwicht moet blijven onder invloed van het eigen gewicht en een horizontale kracht die aangrijpt op een hoogte z_0 boven de ondersteuning, dan zal aan twee voorwaarden moeten worden voldaan:

1. het blok mag niet verschuiven
2. het blok mag niet kantelen

In formulevorm:

$$F_H < \mu F_V \quad (24)$$

$$F_H < \frac{0,5 c}{z_0} F_V \quad (25)$$

In fig. 4 is de grootte van de horizontale kracht weergegeven waarbij evenwichtsverlies van een betonblok zal optreden – als functie van de hoogte van het blok – als de kracht aangrijpt ter halverhoogte van het blok.

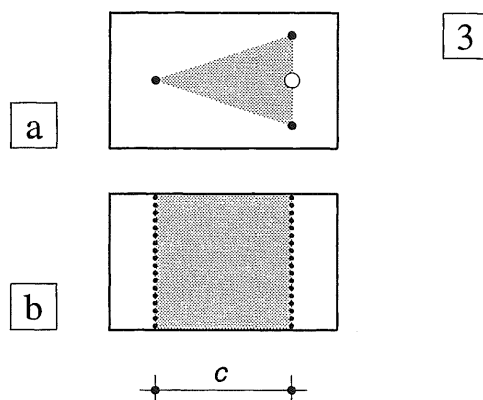


Fig. 3 Stabiele ondersteuning als resultante van alle actiekrachten in het gerasterde gebied ligt

- Ondersteuning in drie punten
- Twee lijnvormige ondersteuning

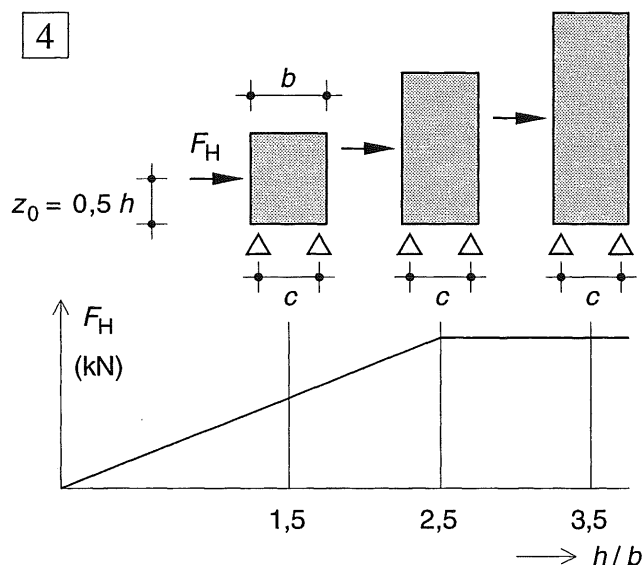


Fig. 4. Afschuiven of kantelen van het blok bij een horizontale kracht ter halverhoogte van het blok

De overgang van afschuiven naar kantelen volgt door (24) en (25) aan elkaar gelijk te stellen. Hieruit volgt: $\mu = c / 2 z_0$. Voor $c = 0,8 b$; $z_0 = 0,5 h$ en $\mu = 0,4$ volgt hieruit $h = 2 b$.

Als de hoogte kleiner is dan $2 \times$ de breedte, dan schuift het blok af en is de afschuifkracht recht evenredig met de hoogte van het blok.

Maar als de hoogte groter is dan $2 \times$ de breedte, dan zal het blok altijd kantelen en de horizontale kracht blijft constant.

$$F_H = \mu b^2 h \gamma \quad (\text{afschuiven})$$

$$F_H = \frac{c}{h} b^2 h \gamma = c b^2 \gamma \quad (\text{kantelen})$$

3.6.6 VOORBEELDEN AFSCHUIVEN EN KANTELEN

De voorbeelden zijn voornamelijk bedoeld om de wijze van aanpak te demonstreren en hebben nog niet op werkelijke praktijkproblemen betrekking. Bij de behandeling van de 'stapelsteenmechanica' in KW-1, zal blijken dat de gehele methodiek op deze eenvoudige regels berust.

VOORBEELD 1

Gegeven (zie fig. 1a):

Een stapeling van vier betonblokken.

Elk blok heeft een gewicht $F_V = 12$ kN.

De wrijvingscoëfficiënt tussen twee blokken onderling bedraagt $\mu_1 = 0,5$ en tussen een blok en de zeer gladde ondergrond $\mu_2 = 0,2$.

In de top van de stapeling wordt een kracht F_H aangebracht die geleidelijk wordt opgevoerd.

Gevraagd:

Onderzoek of er afschuiven of kantelen zal optreden en geef de grootte van de kracht aan waar bij dit gebeurt.

Oplossing:

Achtereenvolgens wordt voor elk van de vier voegen onderzocht bij welke kracht afschuiven op zou treden en bij welke kracht kantelen. Hierbij wordt steeds weer aangenomen dat de andere voegen niet maatgevend zijn.

Afschuiven in voeg n ($= 1, 2, 3, 4$) treedt dus op als geldt:

$$F_H = \mu_n * n F_V \quad (a)$$

Kantelen treedt op als geldt:

$$F_H * n * h = n * F_V * l/2 \quad \text{hieruit volgt}$$

$$F_H = F_V * l/2h \quad (b)$$

n	afschuiven $\mu_n * n F_V$	kantelen $F_V * l/2h$
1	$0,5 * 12 = 6,0$ kN	$12 * 1/1 = 12,0$ kN
2	$0,5 * 24 = 12,0$ kN	12,0 kN
3	$0,5 * 36 = 18,0$ kN	12,0 kN
4	$0,2 * 48 = 9,6$ kN	12,0 kN

De kleinste kracht in de tabel is maatgevend, dus $F_H = 6,0$ kN;

er treedt dus afschuiving op in voeg 1.

Bij het onderzoek naar de kantelkracht is het opvallend dat alle voegen even veel kans maken als er een horizontale kracht in de top van de stapeling aangrijpt. Dit komt omdat bij het kantelmoment de kracht constant is, maar de arm van het moment lineair toeneemt, terwijl bij het tegenwerkende eigengewichtsmoment het gewicht lineair toeneemt, maar de arm constant blijft.

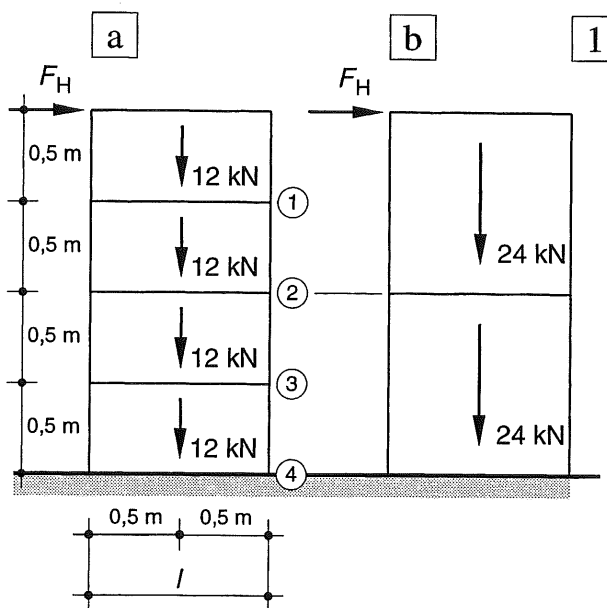


Fig. 1 Losse blokkenstapeling met een horizontale puntlast in de top

- a. Vier blokken
b. Twee dubbel zo hoge blokken

VOORBEELD 2

Vervolgens gebruiken we we dubbel zo hoge blokken zodat de stapeling nu maar uit twee blokken bestaat, zie fig. 1b. We kunnen weer dezelfde tabel gebruiken als we alleen de voegen 2 en 4 beschouwen. In dit geval zal afschuiven optreden in voeg 4 ($F_H = 9,6$ kN).

Zorgen we er nu voor dat de wrijvingscoëfficiënt in voeg 4 ook wordt verhoogd tot $\mu = 0,5$, dan zijn er een aantal mogelijkheden die gelijktijdig op kunnen treden (bij $F_H = 12$ kN).

Namelijk afschuiven in voeg 2 òf kantelen om het rechter uiteinde van voeg 2 of voeg 4. Het hangt van het toeval af wat er zal gebeuren.

3.7.1 FUNDERING

Tot nu toe zijn we uitgegaan van een plat en volkomen star ondersteuningsvlak, waarop we voorwerpen kunnen plaatsen. Dit kan zowel rechtstreeks zijn, als via een aantal min of meer puntvormige of lijnvormige ondersteuning.

Diverse niet al te grote bouwconstructies rusten rechtstreeks op de ondergrond. De onderdelen die contact maken met de grond worden meestal aangeduid als fundering. Het is hierbij gebruikelijk de grond eerst over een zekere diepte te ontgraven. Men noemt dit een *fundering op staal*, zie fig. 2 en 3a.

De fundering bestond vroeger meestal uit metaalwerk. Tegenwoordig wordt vrijwel altijd (gewapend) beton toegepast, zoals is weergegeven in fig. 2. In eerste instantie kan de fundering weer als onvervormbaar worden beschouwd. Ten opzichte van zulke funderingen is de grond *zelf* echter relatief sterk vervormbaar.

In de inleiding van hoofdstuk 3 werd schertsenderspreken over een gebouw dat almaar dieper wegzakte in de drassige ondergrond tot het uiteindelijk beneden maaiveld tot rust kwam op lager gelegen meer draagkrachtige lagen [027].

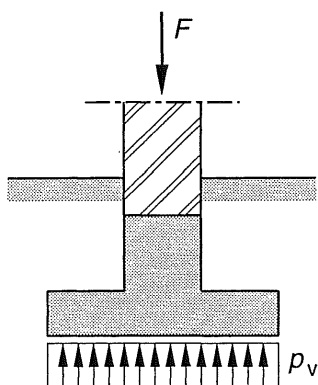


Fig. 2 Fundering 'op staal'

De gemetselde muur rust op een betonbalk met verbrede voet, die weer rechtstreeks draagt op de ondergrond. De tegendruk p_v wordt gelijkmatig verdeeld aangenomen.

Om deze situatie te vermijden kunnen palen in de grond worden geheid die voornamelijk op deze draagkrachtige lagen rusten. Boven op deze palen wordt het gebouw dan aangebracht, zoals is weergegeven in fig. 3b.

Men spreekt dan van een *paalfundering*.

In vroeger tijden werden veel houten paalfunderingen aangebracht, die hun draagkracht soms vrijwel geheel moesten ontleen aan de wrijving die langs de paalomtrek ontstaat tijdens het heien van de palen, zie fig. 3c.

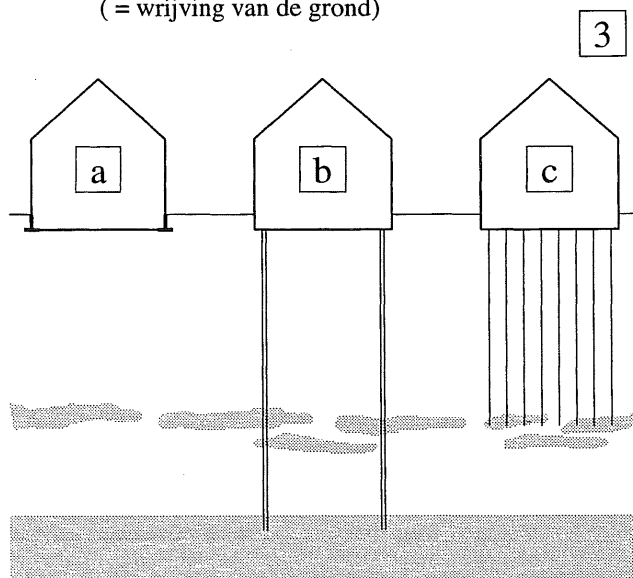
Ga zelf maar eens na hoeveel moeite het kost om een paaltje dat met een hamer in de grond is geslagen, er weer uit te trekken. Hierbij kan immers alleen maar weerstand worden geleverd door wrijvingskrachten langs de omtrek van het paaltje.

Bij moderne paalfunderingen kunnen de palen eigenlijk altijd als starre puntvormige ondersteuning worden beschouwd.

In dit hoofdstuk zullen we ons uitsluitend bezighouden met continue ondersteuning, die echter een verend karakter bezitten.

Fig. 3 Verschillende wijzen van funderen

- Fundering op staal
- Fundering op gewapend betonpalen rustend in een draagkrachtige laag
- Fundering op houten palen op 'kleef' (= wrijving van de grond)



3.7.2 SCHEMATISERING VAN DE ONDERGROND

De krachten die een gebouw op de fundering uitoefent, moeten door de ondergrond worden opgenomen. Deze krachten spreiden zich in de ondergrond. Op enige diepte beneden de fundering merkt men hier dan ook nauwelijks iets meer van. Dit is een ingewikkeld proces, dat wordt behandeld in de grondmechanica.

De grond vormt voor de daarop rustende constructie-delen een continue ondersteuning. Voor de afdracht van de verticale belasting kan men deze ondersteuning met goede benadering vervangen denken door een vierkant stramien van naast elkaar geplaatste gelijke veren, zoals is weergegeven in fig. 1a.

Om de krachtswerking in de fundering en het zich daarboven bevindende gebouw te bepalen, kan men in eerste instantie uitgaan van een stelsel ongekoppelde veren, zie fig. 1b. De indrukking van een veer heeft hierbij geen enkele invloed op de omliggende veren.

We zullen later zien dat een beschrijving van het gedrag van de grond als een stelsel gekoppelde veren, een veel betere overeenkomst met de werkelijkheid geeft, zie fig. 1c. De indrukking van de veren onder het gebouw veroorzaakt namelijk ook een indrukking van de veren naast het gebouw. Het verschijnsel dempt echter snel uit. Voor deze inleidende berekeningen kan dat voorlopig buiten beschouwing blijven.

Alhoewel grond niet in staat is om trekkrachten op te nemen, zullen we voor de berekening toch uitgaan van het gebruikelijke type veren, dat in staat is om zowel drukkrachten als trekkrachten op te nemen. De veerkracht is hierbij recht evenredig met de indrukking, c.q. de uitrekking van de veer.

De uitrekking van een veer wordt in het algemeen als een positieve grootte ingevoerd, hierdoor ontstaat een trekkracht (+) in de veer. De indrukking is dan negatief, hierdoor ontstaat een drukkracht (-) in de veer.

In algemene formule:

$$F = k w \quad (26)$$

k = veerstijfheid

w = verplaatsing (van de beide uiteinden van de veer ten opzichte van elkaar)

Voor een continu medium als grond is het handiger om met de tegendruk p ($= F/A$) per eenheid van oppervlak te werken. Voor (26) kunnen we

dan schrijven: $p A = k w$ waaruit volgt:

$$p = \frac{k}{A} w \quad (26a)$$

We kunnen nu de beddingsmodulus k_s invoeren (s = soil) volgens onderstaande formule:

$$k_s = k/A \quad (27)$$

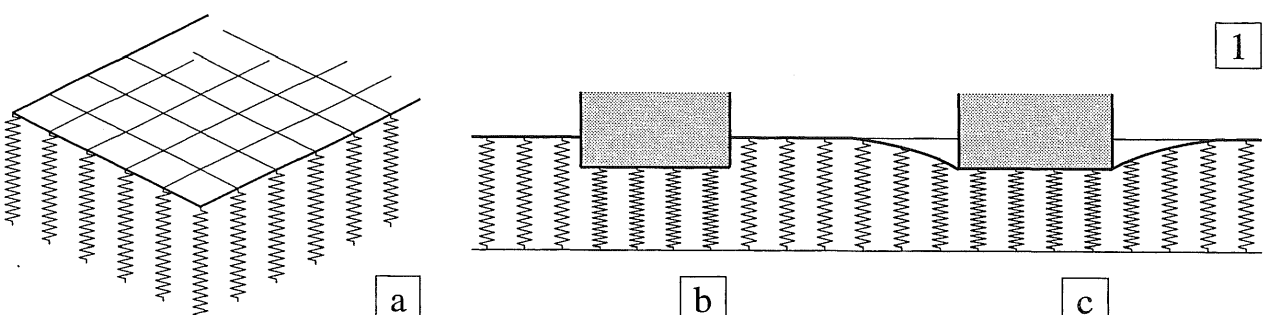
Formule (26a) gaat dan over in:

$$p = k_s w \quad (28)$$

In deze formule zullen we de tegendruk *positief* aannemen als de grond wordt ingedrukt.

Fig. 1 Rekenmodel voor grond
Vertikale verplaatsingen onder en naast de fundering

- Veren in een vierkant stramien
- Ongekoppelde veren
- Gekoppelde veren.



Dit verenmodel is uitstekend geschikt voor de afdracht van verticale belastingen, zie fig. 2. Voor de afdracht van horizontale belastingen is het model in feite niet geschikt. Maar omdat de grond in werkelijkheid overal zijdelings wordt gesteund door de omringende grond, kunnen horizontale krachten toch gemakkelijk worden afgedragen. Maar uit het model blijkt ook, dat alle veren door een geringe zijdelingse verplaatsing, in staat zijn om gelijke horizontale krachten af te dragen, die tezamen evenwicht moeten maken met de uitwendige kracht, zie fig. 2c. We zullen dit laatste verschijnsel nu nog niet beschouwen.

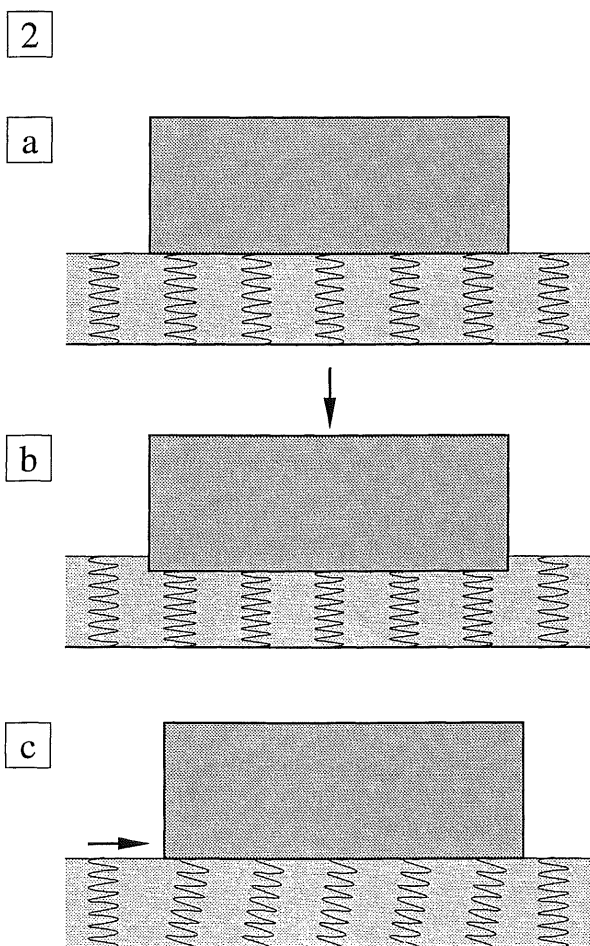


Fig. 2 Model van een gewichtloos blok, ondersteund door veren, die op hun beurt weer rusten op een starre ondergrond

- a. Onbelast
- b. Centrische verticale belasting
- c. Horizontale belasting

3.7.3 EIGENSCHAPPEN VAN GROND

□ De *tegendruk* p die door de grond aan het blok wordt geleverd, hangt uitsluitend af van het gewicht van het blok en de oppervlakte van het grondvlak. Hier worden echter grenzen aan gesteld, omdat de drukken op de grond niet te hoog mogen worden. Dit hangt af van de grondsoort. Heel globaal kan men de volgende toelaatbare tegendrukken aanhouden:

$$\begin{array}{l} \text{klei} \quad p = 20 - 50 \quad \text{kN/m}^2 \\ \text{zand} \quad p = 100 - 300 \quad \text{kN/m}^2 \end{array}$$

De waarde van de *beddingsmodulus* k_s hangt af van de grootte van het grondvlak.

Bij kleine oppervlakken (omstreeks 1 m^2), kan men voor k_s weer zeer globaal de volgende waarden aanhouden:

$$\begin{array}{l} \text{klei} \quad k_s = 200 - 250 \quad \text{kN/m}^3 \\ \text{zand} \quad k_s = 1000 - 2500 \quad \text{kN/m}^3 \end{array}$$

Een waarde $k_s = 1000 \text{ kN/m}^3$ betekent dat een druk van 1000 kN/m^2 een zinking van 1 m zal veroorzaken.

Uitgaande van de toelaatbaar geachte gronddrukken zullen we daar een stuk onder moeten blijven.

Bij belastingen over grotere uitgestrektheden (meer dan 100 m^2) treden veel grotere zinkingen op, omdat de steunende werking van de omringende grond relatief geringer wordt naarmate het oppervlak toeneemt.

Men kan dan globaal op de volgende waarden voor de beddingsmodulus k_s rekenen:

$$\begin{array}{l} \text{klei} \quad k_s = 40 - 50 \quad \text{kN/m}^3 \\ \text{zand} \quad k_s = 200 - 500 \quad \text{kN/m}^3 \end{array}$$

Bij zand treden de berekende zinkingen vrijwel onmiddellijk op, bij klei kan het echter enkele maanden tot een jaar duren voordat de berekende zinkingen zijn opgetreden.

In [059] zullen we zien, dat de druk die het blok op de ondergrond veroorzaakt, alleen maar afhangt van de soortelijke massa en de hoogte van het blok.

Bij een betonnen wand van enkele verdiepingen hoog waar ook nog vloeren op rusten, zullen dus aanmerkelijk grotere drukken kunnen optreden en dientengevolge ook veel grotere zinkingen dan voor het blok zijn berekend.

Bij een fundering op staal – die rechtstreeks op de ondergrond draagt – zal men daarom altijd een verbrede voet onder een wand aanbrengen om de druk op de ondergrond binnen aanvaardbare grenzen te houden, zoals is weergegeven in fig. [055-1]. Bovendien wordt daardoor de stabiliteit van de wand sterk vergroot, zie [067].

3.7.4 BELASTINGAFDRACHT NAAR DE ONDERGROND

Om de gedachte te bepalen wordt uitgegaan van een rechthoekig blok beton met afmetingen:

$a \times b \times h$, zie fig. 1.

Het blok bezit een massa waardoor een verticale kracht wordt opgewekt: het eigen gewicht. Hierdoor wordt de grond enigszins ingedrukt waardoor de grond verticale tegendrukken kan leveren. Dit geeft de mogelijkheid voor het ontstaan van wrijvingskrachten, zodat ook de horizontale krachten die op het blok werken naar de ondergrond kunnen worden afgevoerd.

Voor de berekening zullen we weer uitgaan van een methode die veel wordt gebruikt in de toegepaste mechanica: het afzonderlijk beschouwen van twee belastinggevallen [049 – 051].

– *Belastinggeval 1.*

Uitsluitend verticale krachten door het eigen gewicht van het blok.

– *Belastinggeval 2.*

Uitsluitend horizontale krachten, die door wind kunnen zijn ontstaan, maar die ook een andere oorzaak kunnen hebben.

Belastinggeval 1. wordt besproken in [059].

Belastinggeval 2. wordt besproken in [060-061].

Om geval 2. te kunnen beschouwen, moeten we dus uitgaan van een gewichtslus blok.

In werkelijkheid zou een dergelijk blok door elk zuchtje wind worden weggeblazen. Om dit te voorkómen, moeten we voor de verende ondersteuning aannemen, dat zowel schuifkrachten in horizontale richting kunnen worden overgedragen als druk- en trekkrachten in verticale richting, zie ook [056-057].

In [062-063] zullen we de invloed van de belastinggevallen 1. en 2. weer gezamenlijk beschouwen. We moeten dan wel nagaan of de voorlopige aanname van trekkrachten in de ondersteunende grond verantwoord is geweest. Als dit niet het geval blijkt te zijn, moeten we alsnog op een andere berekeningswijze overschakelen [064].

Als laatste zullen we het blok vanuit de liggende positie weer in de staande positie plaatsen. Vervolgens toetsen we de *stabiliteit* van dit blok, wanneer het uitsluitend is onderworpen aan het eigen gewicht.

Hiertoe geven we het een kleine uitwijking en gaan na of het wel of niet in de oorspronkelijke stand zal terugkeren [042-043].

Het zal blijken, dat bij een verende ondersteuning niet onbeperkt in de hoogte kan worden gebouwd [066-067]. Boven een bepaalde hoogte valt de zaak gewoon om !

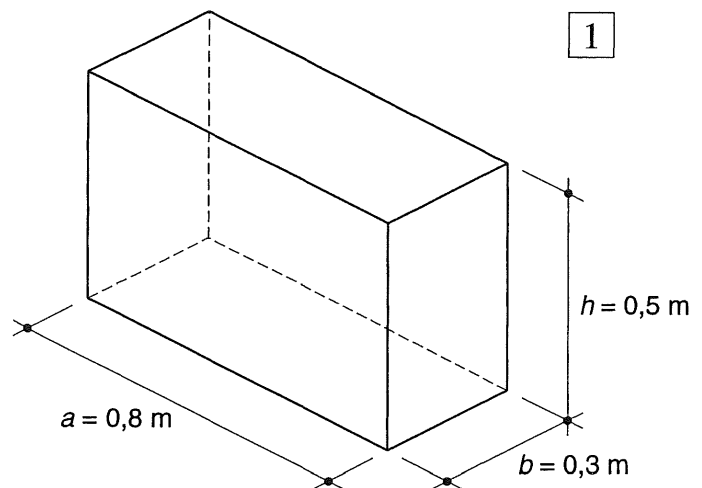


Fig. 1 Afmetingen blok

Het grondvlak heeft de afmetingen $a \times b$ gekregen in plaats van $l \times b$, om vergissingen te vermijden bij de invoering van het weerstandsmoment W in [061].

Zie ook [067].

3.7.5 AFDRACHT VAN VERTICALE BELASTING

We gaan uit van het rechthoekige blok van fig. 1, waar alleen het eigen gewicht op aangrijpt. De resulterende omlaag gerichte kracht bedraagt:

$$F_V = abh \gamma \quad (29)$$

De resulterende kracht grijpt aan in het zwaartepunt M van het blok. Uit evenwichtsoverwegingen moet de resultante van de tegendruk R_V even groot zijn als F_V , in het verlengde liggen van F_V en hieraan tegengesteld zijn gericht, zoals is weergegeven in fig. 2a.

Dit houdt in dat alle veren onder het blok even veel worden ingedrukt, want dat is de enige mogelijkheid om de resultante van alle tegendrukkrachten door het punt O te laten gaan, dat loodrecht onder punt M ligt, zie fig. 2b.

In de figuur zijn de indrukkingen van de 'grondveren' onder het blok sterk overdreven getekend. Bij ongekoppelde veren worden dus uitsluitend de veren onder het blok ingedrukt, en niet de veren direct naast het blok.

De tegendruk is gelijk aan:

$$p_1 = \frac{F_V}{A} = \frac{abh \gamma}{ab} = h \gamma \quad (30)$$

De grootte van de zakking w_1 volgt door (30) in [056-(28)] te substitueren:

$$w_1 = p_1 / k_s = h \gamma / k_s \quad (31)$$

Tot zover dus weinig verrassends. Elk verticaal mootje van het blok wordt rechtstreeks door de daaronder liggende grondveer ondersteund.

Bij de plaatsing van het blok op een plat en volkomen star vlak in [047], namen we maar aan dat de tegendruk gelijkmatig verdeeld zou zijn. Bij deze geïdealiseerde verende ondersteuning kunnen we daar echter zeker van zijn.

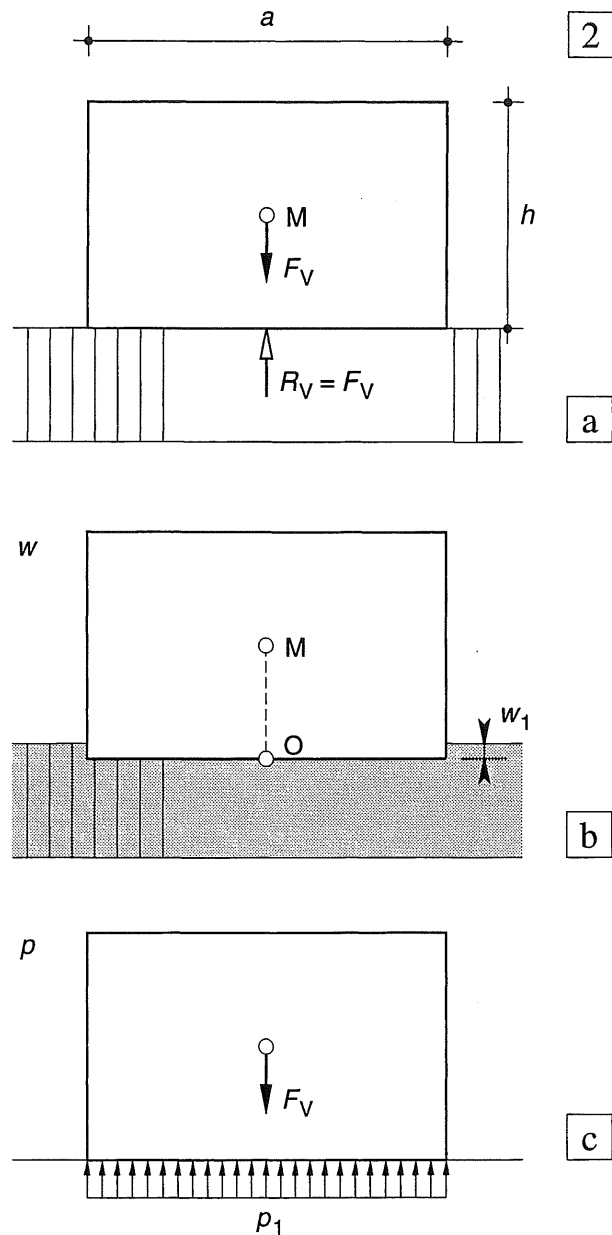


Fig. 2 Blok onder eigen gewicht

- Actie- en reactiekrachten
- Indrukking van de ondergrond
- Gelijkmatig verdeelde tegendruk ondergrond

NUMERIEKE UITWERKING

Bepaling tegendruk

Blokafmetingen $a \times b \times h = 0,8 \times 0,3 \times 0,5 \text{ m}^3$

Inhoud blok: $V = 0,12 \text{ m}^3$

Beton $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$

$F_V = V \gamma = 0,12 \times 24 = 2,88 \text{ kN}$

De tegendruk van de grond is dan gelijk aan:

$p_1 = F_V / ab = 2,88 : (0,8 \times 0,3) = 12,0 \text{ kN/m}^2$

Bepaling zakking

We nemen aan dat het blok op zandgrond wordt geplaatst waarvoor geldt: $k_s = 1000 \text{ kN/m}^3$.

De zakking bedraagt dan:

$w_1 = p_1 / k_s = 12 / 1000 = 0,012 \text{ m} = 12 \text{ mm}$.

De druk $p_1 = 12 \text{ kN/m}^2$ blijft ver beneden de voor zand toelaatbaar geachte waarde van minstens 100 kN/m^2 .

3.7.6 BEREKENING TEGENDRUK BIJ HORIZONTALE BELASTING

Evenals in [050], laten we de horizontale kracht F_H weer op een afstand z_0 boven het grondvlak aangrijpen, zie fig. 1a. Om na te kunnen gaan wat er in het aanrakingsvlak met de ondergrond gebeurt, verplaatsen we de horizontale kracht naar dit vlak (zie zo nodig [016]).

Om het effect van de oorspronkelijk kracht onveranderd te laten, moeten we een rechtsdraaiend koppel toevoegen ter grootte:

$$K_2 = +F_H z_0 \quad (32)$$

Om de horizontale kracht in het ondervlak van het blok op te kunnen nemen, zullen alle grondveren iets naar rechts moeten verplaatsen, hoewel ze hiervoor eigenlijk niet zijn bedoeld (zie ook fig. [057-2c]). Onder het blok ontstaat dan een gelijkmatig verdeelde horizontale schuifkracht per eenheid van oppervlak ter grootte:

$$p_h = F_H / ab \quad (33)$$

In fig. 1a is de resulterende horizontale reactiekracht F_H langs zijn werklijn naar rechts verschoven, zodat hij als het ware buiten het blok aangrijpt. Voor de verdere berekening beschouwen we dan alleen het koppel K_2 en niet langer de beide krachten F_H (zwart en wit) ter plaatse van het grondvlak van het blok.

Als het blok een rechtsdraaiend koppel K_2 op de ondergrond uitoefent, zal het 'verenpakket' een even groot linksdraaiend koppel op het blok moeten uitoefenen, zie fig. 1a.

Zoals bekend moet de totale verticale reactie van dit koppel gelijk zijn aan nul. Dit kunnen we alleen verwezenlijken door het blok te laten roteren om de zwaartelijijn $O'-O''$ van het grondvlak, zie fig. 2a, b. Dit houdt in dat de lijn $A'-A''$ evenveel stijgt als de lijn $B'-B''$ zakt.

De verticale verplaatsingen van het blok zijn dan recht evenredig met de afstand van elk punt tot de lijn $O'-O''$, zoals is weergegeven in fig. 2b en fig. 1b. Het verloop van de verticale tegendruk moet dus eveneens lineair variëren met de afstand tot de lijn $O'-O''$, zie fig. 2c en 1c.

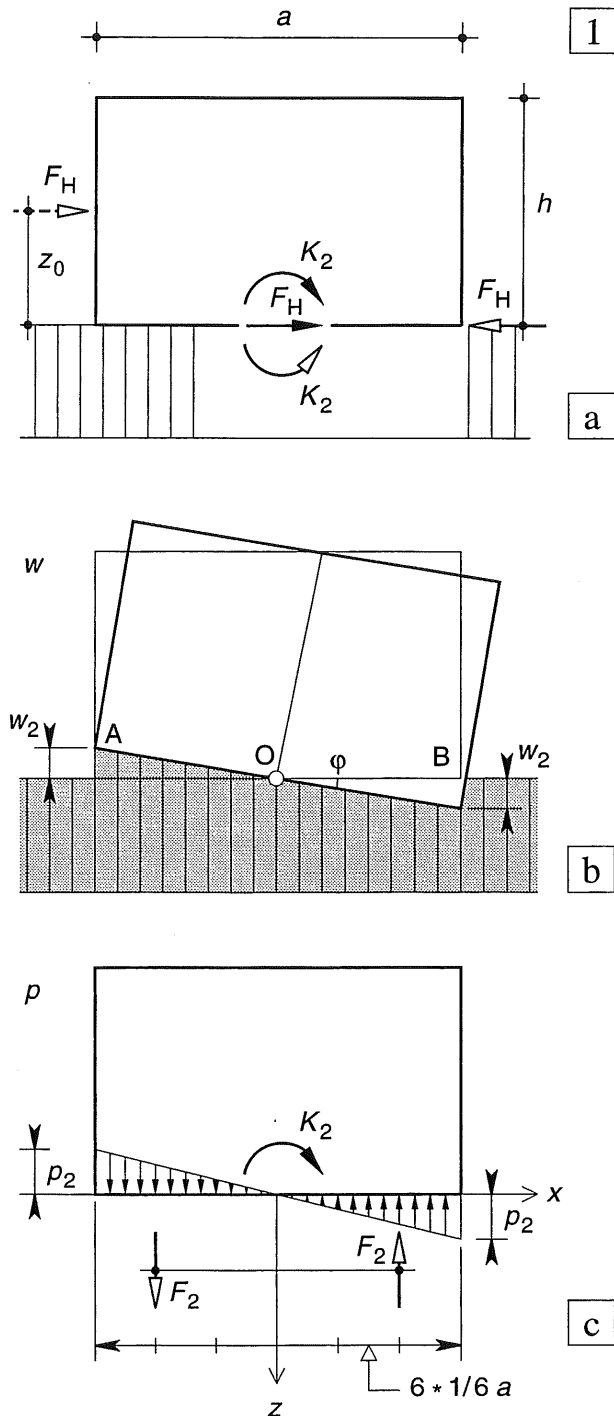


Fig. 1 Horizontale kracht op het blok
 a. Het 'verplaatsen' van F_H naar het grondvlak
 Aktiekrachten = zwarte pijlpunten
 Reactiekrachten = witte pijlpunten
 b. Rotatie van het blok
 c. Tegendrukverdeling van de grond

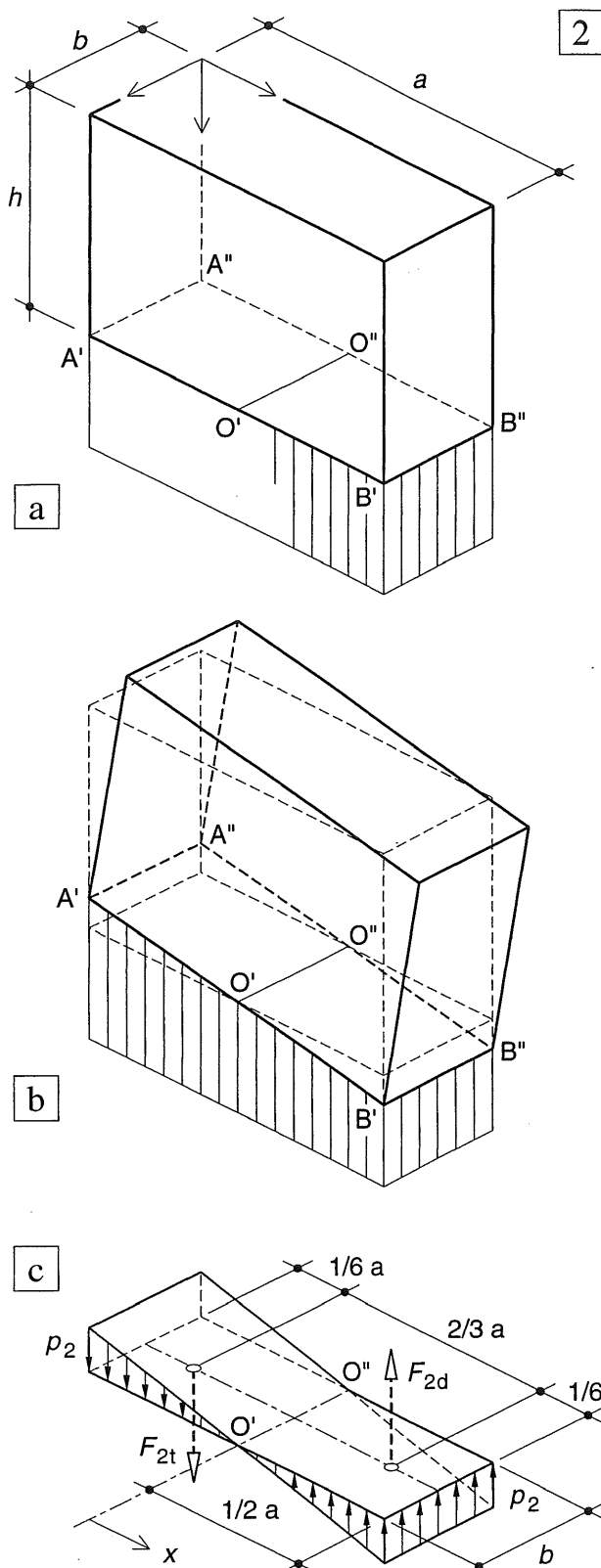


Fig. 2 Blok van fig. 1 in perspectief
 a. Blok met ondersteunende grondverren
 b. Rotatie van het blok
 c. Tegendrukverdeling met resulterende krachten

De maximale tegendruk langs de korte zijranden A'-A'' en B'-B'' van het blok wordt hierbij aangegeven met p_2 .

De totale trekkracht en drukkracht is dan gelijk aan de 'inhoud' van elk van de tegendrukfiguren en bedraagt:

$$F_2 = \frac{1}{2} b \frac{a}{2} p_2 = \frac{1}{4} b a p_2 \quad (34)$$

De zwaartepunten van deze figuren liggen elk op een afstand van $\frac{1}{3} * a/2 = a/6$ vanaf de korte zijkanten van het blok. De verticale lijnen door deze zwaartepunten vormen dan de werklijnen van de resulterende trekkracht F_{2t} en de resulterende drukkracht F_{2d} , zie fig. 2c.

Deze twee krachten F_2 leveren dan tezamen het 'reactie-koppel' dat weer evenwicht maakt met het 'actie-koppel' K_2 .

Aangezien de 'arm' van het koppel gelijk is aan $\frac{2}{3} * a$, volgt door substitutie van F_2 uit (34):

$$K_2 = F_2 \frac{2}{3} a = \frac{1}{6} b a^2 p_2 \quad (35)$$

We definiëren nu als weerstandsmoment W :

$$W = \frac{1}{6} b a^2 \quad (36)$$

Let op: de lineaire term (b) is evenwijdig aan de rotatie-as, de kwadratische term (a^2) staat hier loodrecht op.

Substitutie van (36) in (35) levert dan in een meer algemene vorm:

$$p_2 = \frac{K_2}{W} \quad (37)$$

De maximale tegendruk is nu bekend. Om de bijbehorende maximale zakking te vinden, zullen we formule [056-(28)] gebruiken in de vorm:

$$p_2 = k_s w_2 \quad (28a)$$

Substitutie van formule (37) in (28a) levert dan in algemene termen:

$$w_2 = \frac{p_2}{k_s} = \frac{K_2}{k_s W} \quad (38)$$

3.7.7 HORIZONTALE EN VERTICALE BELASTING TEZAMEN

In [059] t/m [061] zijn de effecten van de verticale belasting en de horizontale belasting elk afzonderlijk beschouwd. In de onderhavige paragraaf worden de effecten van beide gecombineerd. Zoals voorheen is afgeleid, is het verloop van de zakking en de tegendruk geheel gelijkvormig, zolang we aannemen dat grond zowel trek- als drukkrachten kan opnemen.

We gaan weer uit van het blok dat in [059] is behandeld: Belastinggeval 1 = alleen verticale belasting door het eigen gewicht.

Blokafmetingen $a \times b \times h = 0,8 \times 0,3 \times 0,5 \text{ m}^3$

Beton $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$

$F_V = 2,88 \text{ kN}$

Tegendruk vanuit de grond: $p_1 = 12,0 \text{ kN/m}^2$

Blok rust op zandgrond met een beddingsmodulus:

$k_s = 1000 \text{ kN/m}^3$.

Zakking van het blok: $w_1 = 0,012 \text{ m} = 12,0 \text{ mm}$.

Beide resultaten zijn weergegeven in fig 1a, (schaal voor de tegendruk links, schaal voor de zakking rechts).

Voor belastinggeval 2 = alleen een horizontale kracht F_H zijn in [061] de formules afgeleid.

Voor de numerieke uitwerking is uitgegaan van een horizontale kracht die aangrijpt ter halverhoogte van het blok en gelijk is aan 25 % van de verticale kracht.

Horizontale kracht $F_H = 1/4 * F_V$

$F_H = 2,88 / 4 = 0,72 \text{ kN}$

$K_2 = F_H * h / 2 = 0,72 * 0,25 = 0,18 \text{ kNm}$

De maximale tegendruk p_2 volgt uit [061- (37)]:

$p_2 = K_2 / W = K_2 / (1/6 * b a^2) = 6 K_2 / b a^2$
 $= 6 * 0,18 : (0,3 * 0,8^2) = 5,62 \text{ kN/m}^2$.

De maximale zakking w_2 volgt uit [061-(38)]

$w_2 = p_2 / k_s = 5,62 / 1000 = 0,00562 \text{ m} = 5,62 \text{ mm}$

De resultaten zijn weergegeven in fig. 1b.

De numerieke waarden van de tegendrukken (in kN/m^2) en van de zakkingen (in mm) in fig. 1a,b blijken bij de gegeven aannamen gelijk te zijn. In het algemeen zal dit natuurlijk niet het geval zijn.

De combinatie van de belastinggevallen 1 en 2 is weergegeven in fig. 1c (gewoon algebraïsch optellen van de extreme zakkingen in mm).

Rechts: $w = w_1 + w_2 = 12,0 + 5,62 = 17,6$

Links: $w = w_1 - w_2 = 12,0 - 5,62 = 6,4$

De extreme zakkingen aan de randen van het blok kunnen dan door een rechte lijn worden verbonden. Voor de tegendrukken geldt een analoge procedure.

Uit het resultaat blijkt dat overall drukkrachten onder het blok optreden, zodat het blok niet los van de grond zal komen.

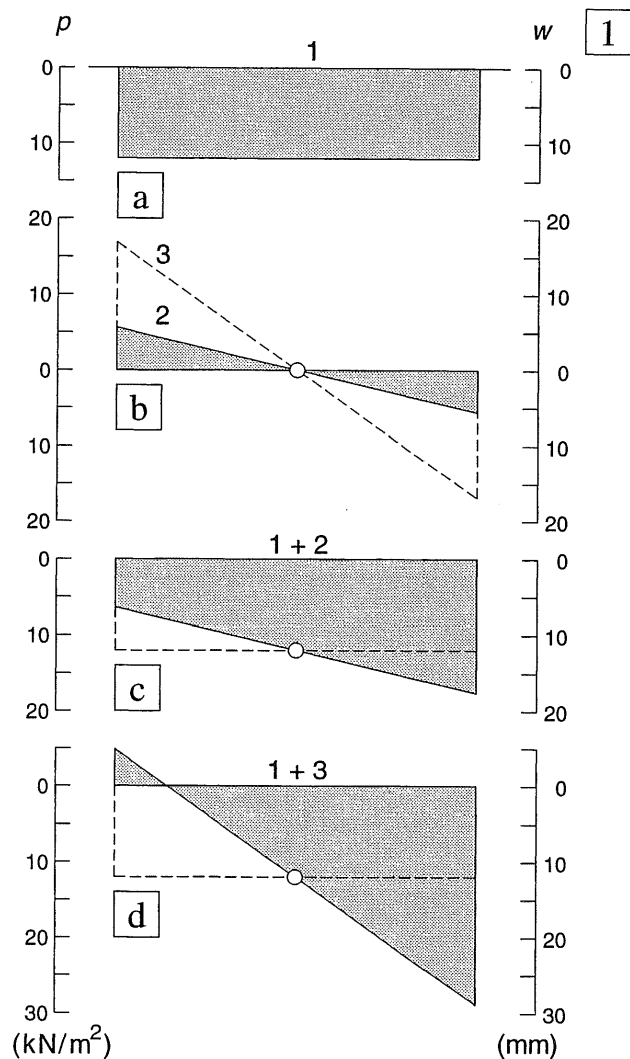


Fig. 1 Superpositie van tegendruk en zakking ten gevolge van verticale en horizontale belasting

Schaal links: tegendrukken p

Schaal rechts: zakkingen w

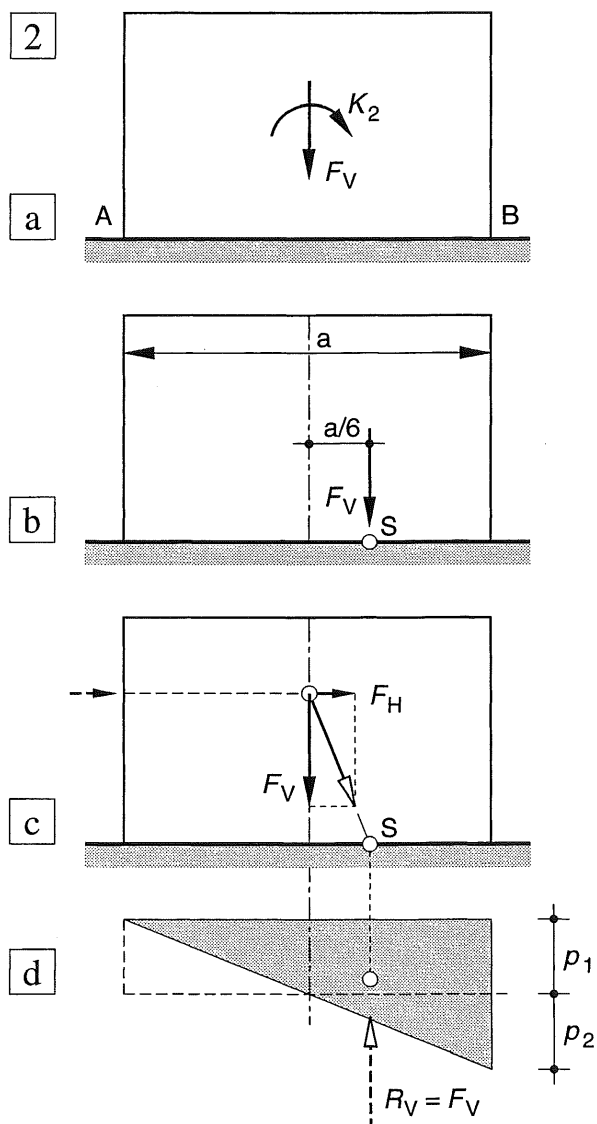
- Gelijkmatig verdeelde tegendruk ten gevolge van het eigen gewicht F_V (1)
- Lineair verlopende tegendruk ten gevolge van een horizontale belasting $F_H = 1/4 F_V$ (2) en (gestippeld) $F_H = 3/4 F_V$ (3)
- Superpositie van de belastinggevallen 1 en 2
- Superpositie van de belastinggevallen 1 en 3

3.7.8 OPTREDEN VAN TREKKRACHTEN *Grensgeval*

Als we een horizontale kracht aanbrengen die gelijk is aan $F_H = 0,75 F_V$, dan worden de tegendrukken en zakkings voor dit belastinggeval 3, precies $3 \times$ zo groot als voor belastinggeval 2. Voor beide gevallen zijn de uitkomsten weergegeven in fig. 1b

Als we nu de belastinggevallen 1 en 3 van fig. 1 combineren, dan moeten over een klein deel van het grondvlak trekkrachten worden geleverd zie fig. 1d. Hiertoe is grond echter niet in staat.

De aannamen van de berekening zijn dan niet langer geldig en we moeten wat anders bedenken om de krachtsafdracht te kunnen bepalen. Dit wordt behandeld in [064].



De grens waarbij superpositie nog juist toelaatbaar is, wordt bereikt als de zakkings in punt A van het blok juist gelijk is aan nul (in feite dus in de lijn A'-A'' van fig. [061-2]). Dit houdt in:

$$w_2 = w_1$$

Daaruit volgt dat tegelijkertijd geldt:

$$p_2 = p_1 \quad (39)$$

De tegendruk p_2 ten gevolge van K_2 volgt uit [061-(37)] en de tegendruk p_1 ten gevolge van F_V volgt uit [059-(30)]:

$$p_2 = \frac{K_2}{W} \quad p_1 = \frac{F_V}{A}$$

waarin $W = 1/6 ba^2$ en $A = ba$

Substitutie van bovenstaande waarden in (39) levert:

$$K_2 = \frac{W}{A} F_V = \frac{a}{6} F_V \quad (40)$$

De superpositie van de verticale kracht F_V met het rechtsdraaiende koppel $K_2 = a/6 * F_V$, houdt in dat de kracht F_V over een afstand $a/6$ naar rechts wordt verplaatst, zie fig. 2b; herlees hiertoe zonedig [015].

Het komt er dus op neer dat – wáár F_H voor dit speciale geval ook aangrijpt – de resultante van F_V en F_H door punt S van fig. 2c zal gaan, gelegen op een afstand $a/6$ rechts van O. Het verloop van de tegendruk is driehoekig, zie fig. 2d.

De component F_V die met deze tegendruk evenwicht maakt, snijdt het grondvlak dus juist ter plaatse van de verticale zwaartelijns van de tegendrukfiguur.

Fig. 2 Grenzgeval waarin de tegendruk aan één zijrand van het blok juist gelijk is aan nul
 a. Kracht F_V en moment K_2 op het blok
 b. Vervanging door een excentrische kracht F_V
 c. Equivalent van de gevallen a. en b. : $F_V + F_H$
 d. Verloop van de tegendruk

3.7.9 GEDEELTELIJK MEEWERKEND GRONDVLAK

In de vorige paragraaf [063] is het grensgeval beschouwd, waarin de tegendruk en de zakking aan de linker zijrand van het blok, beide juist gelijk zijn aan nul.

De resulterende kracht op het blok kan ter plaatse van het grondvlak weer worden ontbonden in een horizontale component F_H en een verticale component F_V .

Voor F_H nemen we weer aan dat deze door een uiterst geringe horizontale verschuiving van de grondveren kan worden opgenomen; zoals is weergegeven in fig. [057-2c].

De verticale component maakt juist evenwicht met de driehoekig verlopende verticale tegendruk, de resultante grijpt (in projectie) immers aan op een afstand $a/3$ vanaf punt B en gaat dus door het zwaartepunt S van de tegendrukfiguur, zie fig. 1a,b (zie ook fig. [063-2]).

Het is dan ook duidelijk wat er zal gebeuren als $w_2 > w_1$. De grondveren kunnen geen trek opnemen en het blok zal gedeeltelijk los komen van de ondergrond, zie fig. 1c. Dit hoeft geen bezwaar te zijn, zolang de werklijn van de resulterende kracht maar binnen het grondvlak van het blok blijft.

Ook in dit geval moet de verticale component F_V van de resulterende kracht F , immers juist evenwicht maken met de driehoekig verlopende tegendrukken van de grondveren, zie fig. 1d.

Als de werklijn van F het grondvlak snijdt op een afstand f vanaf de rechter zijkant van het blok, dan zal het blok over een lengte $d = 3f$ door drukveren worden gesteund en zal de rest van het blok loskomen van de ondersteunende grondveren, zie ook fig. 2e.

Naarmate de afstand d echter kleiner wordt, nemen de waarden van p_3 en w_3 snel toe. Uit de voorwaarde $F_V = 1/2 * b * d * p_3$ volgt, dat als de afstand d naar nul nadert, de tegendruk p_3 naar oneindig nadert.

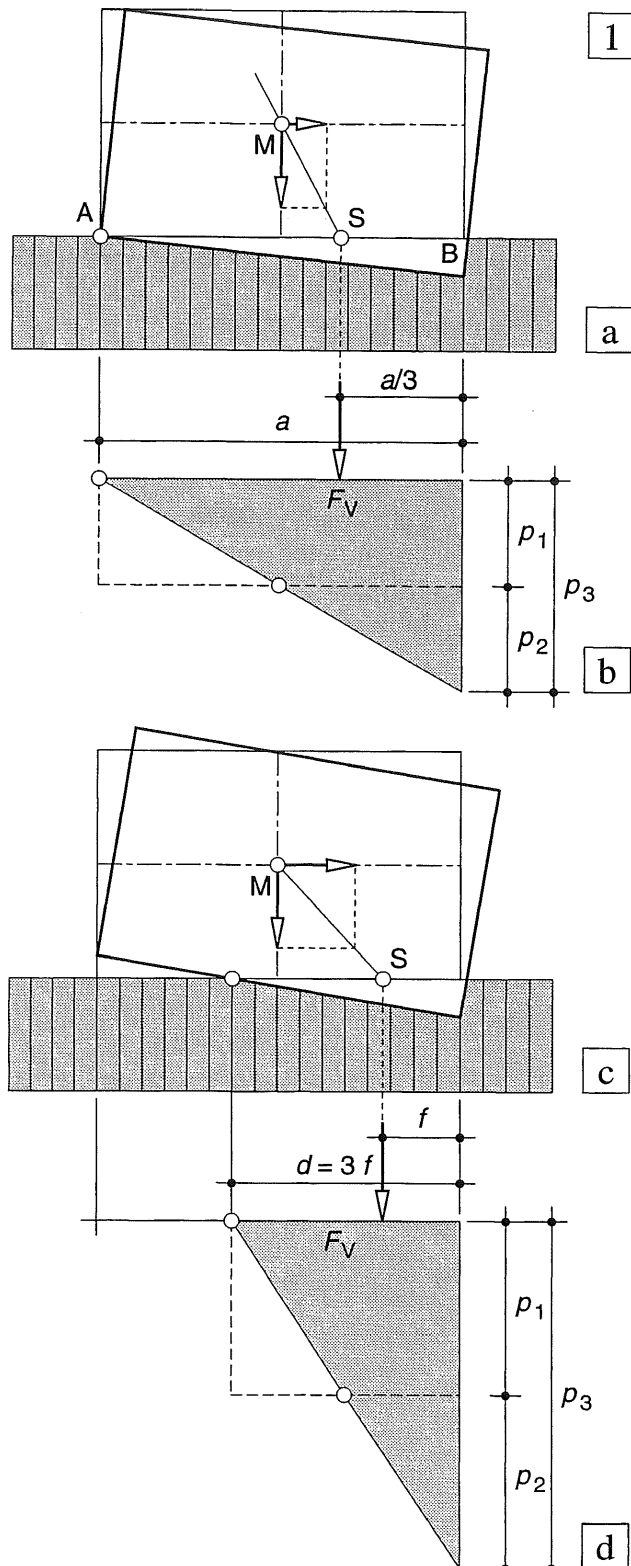


Fig. 1 Gedeeltelijk meewerkend grondvlak
 a. Verticale verplaatsingen in het grensgeval
 b. Bijbehorende tegendrukverdeling
 c. Blok komt los van de ondergrond
 d. Bijbehorende tegendrukverdeling

Speelmodellen

In fig. 2 is het model van een blok ondersteund door een aantal veren. Het blok zelf is nagenoeg gewichtloos, zodat in onbelaste toestand de veren niet worden ingedrukt, zie fig. 2a. Bij een centrische belasting ondergaan alle veren dezelfde verticale verplaatsing, zie fig. 2b.

In fig. 3c is de last excentrisch aangebracht; het ligt voor de hand dat de zakkingen aan de kant waar de last staat, het grootst zijn. In fig. 3d kunnen de veren zowel druk als trek opnemen; maar in fig. 3d alleen maar druk, het blok komt dan ook gedeeltelijk los van de veren.

De verplaatsingen in de tekeningen van fig. 1 en bij de modellen van fig. 2, zijn zoals gewoonlijk weer sterk overdreven. Bij excentrische belastingen zal het zwaartepunt M van het blok zich ook zijdelings verplaatsen. Dit is niet in de tekeningen van fig. 1 aangegeven; bij de speelmodellen van fig. 2 komt het duidelijk naar voren.

In werkelijkheid zijn de verticale verplaatsingen vrijwel altijd klein en heeft de daaruit volgende horizontale verplaatsing van de verticale kracht geen enkele betekenis. Bij een grote hoogte h en een lage waarde van de beddingsconstante k_s (dus bij slappe grond) moet men echter op zijn qui vive zijn, zie [066-067]. Het is dan een stabiliteitsverschijnsel geworden, waarbij de vervormingen c.q. verplaatsingen de krachtwerking mede beïnvloeden.

Recapitulatie

voor een *rechthoekig* grondvlak

- Ga na waar de resulterende kracht het grondvlak snijdt.
- Is het binnen de afstand $e = a/6$ vanaf het zwaartepunt O van het grondvlak, bepaal de tegendrukverdeling dan door superpositie, zoals is behandeld in [062].
- Is het buiten deze afstand, bepaal de spanningsverdeling dan rechtstreeks uit de grootte van het meewerkend grondvlak, zoals is beschreven in [064].

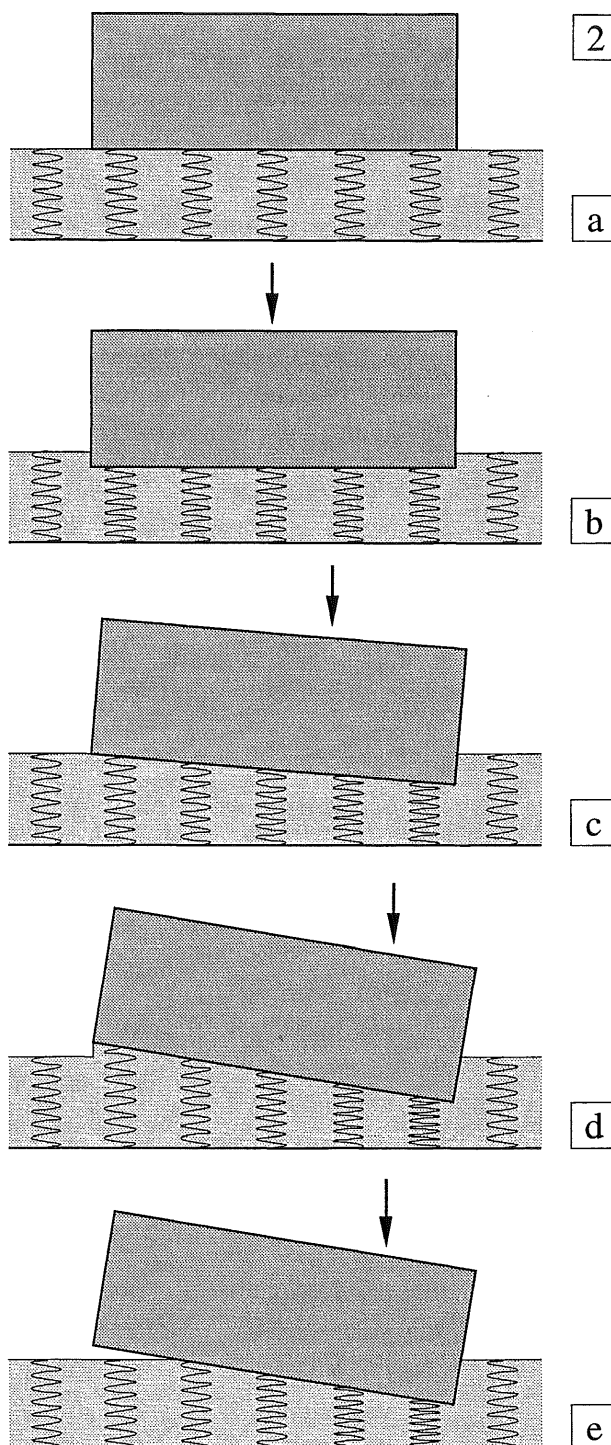


Fig. 2 Model van een gewichtloos blok, opgelegd op een verenpakket en belast door één puntlast F

- a. Onbelast
- b. Centrisch belast; $e = 0$
- c. Excentriciteit $e = a/6$
- d. Excentriciteit $e = a/3$ blok vast verbonden
- e. Excentriciteit $e = a/4$ blok los opgelegd
Kracht = $9/8 * F$

3.8.1 OVERGANG VAN STABIEL NAAR LABIEL EVENWICHT

Evenals in [054] zetten we het blok overeind op een vlakke ondergrond. Daar is de ondergrond echter volkomen star aangenomen, terwijl we hier uitgaan van een verende ondersteuning.

Door het eigen gewicht zakt het blok een klein stukje waardoor een gelijkmatige tegendruk ontstaat, zie fig. 1a. Om de stabiliteit te toetsen geven we het blok een kleine horizontale uitwijking, waarbij we er voor zorgen, dat overal drukspanningen in het ondersteuningsvlak blijven optreden, zie fig. 1b.

Het blok is dan in evenwicht onder invloed van de volgende krachten:

- De horizontale kracht F_H , die we hebben aangebracht om het blok een uitwijking te geven.
- De actiekracht F_V van het eigen gewicht
- De reactiekracht $R_V = F_V$, die werkt vanuit de ondergrond.
- Het reactiekoppel K_2 dat ontstaat door het moment dat de kracht F_H levert. Dit moment veroorzaakt een lineair verloop van de indrukking van de grondveren.

Als we nu de uitwendige kracht F_H weer wegnemen, dan werken op het blok twee koppels:

- Een rechtsdraaiend actiekoppel: $K_1 = F_V * e$
- Een linksdraaiend reactiekoppel: K_2

Indien geldt $K_2 > K_1$

dan draait het reactiekoppel het blok weer terug in de oorspronkelijke stand: *stabiel evenwicht*

Indien geldt $K_2 < K_1$

dan kan het reactiekoppel het blok niet terugdraaien en kantelt het verder: *instabiliteit*.

Uit formule [061-(38)] volgt:

$$K_2 = k_s * W * w_2 \quad (38a)$$

Uit fig. 1c volgt:

$$K_1 = F_V * e = F_V * h/a * w_2 \quad (41)$$

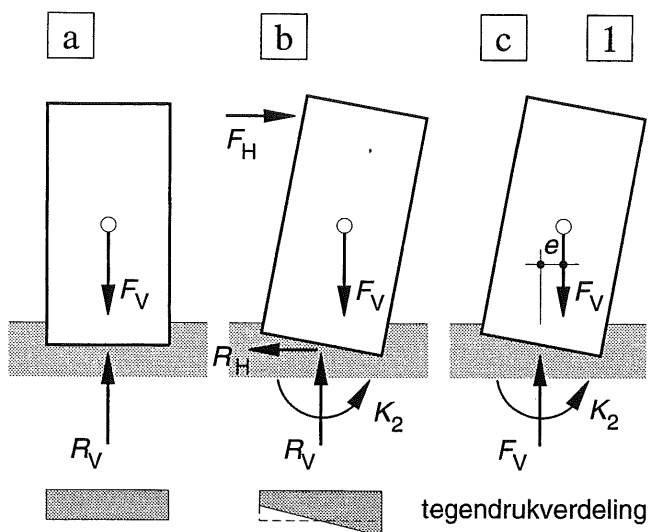


Fig. 1 Stabiliteit verend ondersteund blok

- a. Evenwicht onder invloed van het eigen gewicht
- b. Krachten na het aanbrengen van een uitwijking
- c. Koppels die op het blok werken na het wegnemen van de horizontale kracht

Overgang van stabiel naar labiel evenwicht zal optreden als geldt: (38a) = (41). Lees daartoe eerst de onderstaande tekst omtrent symbolen

Symbolen

De afmetingen van het blok wijzigen uiteraard niet door het een kwart slag te draaien. Maar om dezelfde symbolen als in [061] te kunnen gebruiken, moet het grondvlak de afmetingen $a \times b$ bezitten en moet de hoogte weer gelijk zijn aan h . Zo geldt dus:

$$a = 0,5 \text{ m}; b = 0,3 \text{ m}; h = 0,8 \text{ m.}$$

De genoemde gelijkstelling (38a) = (41) levert dan:

$$\begin{aligned} k_s * W &= F_V * \frac{h}{a} \quad \text{ofwel} \\ k_s \frac{1}{6} b a^2 &= \gamma b a h \frac{h}{a} \quad \text{zodat} \\ k_s &= 6 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \gamma \end{aligned} \quad (42a)$$

Voor een stabiele stand moet k_s dus groter zijn dan de waarde in het rechterlid van (42a). Substitutie van de eerder genoemde numerieke waarden levert dan:

$$k_s > 6 \left(\frac{0,8}{0,5}\right)^2 24 = 369 \text{ kN/m}^3$$

Conclusie; aangezien $k_s = 1000 \text{ kN/m}^3$, zal het blok blijven staan. Deze conclusie blijkt echter voorbarig, want de rotatie-as van het blok kan ook samenvallen met de lengte-as van het blok. In dat geval is het weerstandsmoment gelijk aan $W = 1/6 * ab^2$ en gaat formule (42a) over in:

$$k_s = \frac{1}{6} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \gamma \quad (42b)$$

Het blok is dan stabiel als geldt:

$$k_s > 6 \left(\frac{0,8}{0,3}\right)^2 24 = 1024 \text{ kN/m}^3$$

Hieraan wordt dus niet voldaan en het blok zal onder eigen gewicht onherroepelijk omvallen. Aangezien de grootte van de uitwijking niet in de formule voorkomt, doet die dan ook niet ter zake.

Als de uitkomst van deze berekening ongeloofwaardig overkomt, stapel dan eens zelf een aantal goed passende blokken op elkaar op een verende ondergrond, bijv. op een stijve tafel of vloer waar een kleed op ligt. Boven een bepaalde hoogte zal blijken dat de stapeling in zijn geheel omvalt, hoe zorgvuldig hij ook is opgebouwd.

Zetten we het blok via een mortellaagje op een betonplaat met een oppervlak van $0,8 \times 0,8 \text{ m}^2$, dan geldt voor het contactvlak met de grond: $W_x = W_y$ en het blok zal overeind blijven staan (de index geeft de betreffende rotatie-as aan). Ook het ingraven van de fundering over een zekere diepte (0,8 à 1,2 m) heeft meestal een gunstig effect. De later aangestorte grond drukt aan beide zijden tegen de funderingsbalk. Als deze zijdelings wil uitwijken, moet grond opzij worden geduwd, waardoor grote horizontale wrijvingskrachten ontstaan.

De waarden van k_s zijn slechts bij benadering bekend en bovendien afhankelijk van de grootte van het grondvlak. Willen we zekerheid hebben omtrent de stabiliteit dan moet liefst gelden:

$$k_s \geq 8 \text{ à } 10 \times k_{s \text{ min}}$$

In feite moeten we de berekeningen niet uitvoeren voor zulke kleine oppervlakken als in het voorbeeld zijn gegeven. De waarde van k_s neemt immers snel toe naarmate het oppervlak kleiner wordt.

We gaan nu omgekeerd te werk. We nemen aan dat de tegendrukcoëfficiënt nauwkeurig bekend is en we gaan na, hoe hoog we een kolom van metselwerk kunnen maken die een grondvlak heeft van 1 m^2 .

Uit (42a) volgt:

$$h = a \sqrt{\frac{k_s}{6\gamma}} \quad (43)$$

We substitueren:

$$a = 1,0 \text{ m}; \quad k_s = 1000 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma = 20 \text{ kN/m}^3 \text{ [075]}$$

$$\text{Dan volgt: } h = 2,89 \text{ m}$$

$$\text{Voor } k_s = 2500 \text{ kN/m}^3 \text{ volgt: } h = 4,56 \text{ m}$$

Hier zullen we dus een stuk onder moeten blijven.

Waarschuwing:

Pas formules nooit klakkeloos toe, ga altijd na of de symbolen in een opgave dezelfde betekenis hebben, die ook bij de afleiding is gebruikt.

Zo vinden we bij een rotatie om de x -as:

$$W_x = 1/6 * ab^2$$

en bij een rotatie om de y -as:

$$W_y = 1/6 * ba^2$$

Bij het bepalen van de buigspanningen in liggers in KW-4, zullen we het weerstandsmoment W meestal aantreffen in de vorm:

$$W_y = 1/6 * bh^2 \text{ [099-(11)]}$$

Maar bij buiging om de z -as gaat dit over in:

$$W_z = 1/6 * hb^2$$

4 SCHEMATISEREN

Schematiseren van de belastingen, de constructie en de constructiematerialen

4.1 INLEIDING

4.1.1 BEGRIP SCHEMATISEREN

Het ontwerpen van een gebouw is een complexe aangelegenheid waarbij vele disciplines zijn betrokken. Aan grote gebouwen zal dan ook meestal een team van specialisten werken.

De bouwkundig ingenieur zal hierbij soms als architect de leiding hebben, maar hij kan ook als een van de 'gewone' leden van het team zijn bijdrage leveren.

In elk geval zal hij van alle andere disciplines de grote lijn in de vingers dienen te hebben, óók van het ontwerpen van de draagconstructie.

Alle krachten die op een gebouw werken, moeten via de onderdelen van dat gebouw naar de ondergrond worden afgedragen. Het doorzien van de wijze waarop dit gebeurt is moeilijk, en het rechtstreeks berekenen en dimensioneren van het gehele gebouw blijkt een welhaast onmogelijke opgave te zijn.

Schematiseren betekent dan ook dat het werkelijke, complexe gebouw wordt vereenvoudigd tot een structuur – de draagconstructie – die in staat is om de krachten naar de ondergrond af te voeren. Hierbij worden alle details weggelaten, die de krachtswerking niet wezenlijk beïnvloeden. Dit vereist veel ervaring die men slechts geleidelijk kan opdoen.

Het schematiseren kan inhouden dat slechts bepaalde onderdelen van het gebouw worden beschouwd, of dat bepaalde belastingen – waarvan men uit ervaring weet dat ze weinig invloed hebben – geheel worden weggelaten. Soms worden ze vervangen door andere belastingen die ons bij de berekening minder moeilijkheden opleveren. Schematiseren omvat een scala van gebruiken, teken- en rekenafspraken, die men zich slechts eigen kan maken door oefening.

4.1.2 OVERZICHT

De wijze waarop wordt geschematiseerd, hangt in sterke mate af van de grootte, de importantie en het gebruik van de te bouwen constructie. Het leggen van een plank over een sloot vergt minder zorgen dan het aanbrengen van een vloer in een woonhuis, en dit is weer aanmerkelijk eenvoudiger dan het overspannen van een rivier met een brug. Met dit laatste voorbeeld zijn we terug op ons uitgangspunt, de plank over de sloot.

De functie van zowel de plank als de brug is dezelfde, namelijk om van de éne oever naar de andere te komen. Beide constructies zijn echter van een geheel verschillende orde van grootte. Toch kan het allereerste schema voor beide nog gelijk zijn: een streepje dat de oevers verbindt.

Om het ontwerp en de uitvoering van bouwconstructies in goede banen te leiden, zijn voorschriften opgesteld die de minimum eisen weergegeven waaraan moet worden voldaan.

Zij worden aangeduid als de TGB:

(Technische Grondslagen voor Bouwconstructies)

De opzet en de nadere detaillering van deze voorschriften bepalen in belangrijke mate de wijze van schematiseren.

De geest van de voorschriften – wat krachtswerving betreft – zal worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld, waar de voorschriften in het geheel niet voor zijn bedoeld: een plank over een sloot, zie [070 t/m 072].

Voor schematisering komen in aanmerking:

1. de geometrie van de constructie
2. de belastingen op de constructie
3. de materiaaleigenschappen

1. *Geometrie*

De geometrie van de constructie wordt meestal vrij sterk geschematiseerd.

Bij de constructie zullen we ons aanvankelijk beperken tot de diverse *constructie-onderdelen* waaruit de totale constructie is opgebouwd. De plaatsen waar deze onderdelen worden ondersteund door de aangrenzende constructiedelen, worden aangeduid als de *opleggingen*.

Ook de opleggingen worden geïdealiseerd en geschematiseerd. Dit komt de eenvoud van de berekening sterk ten goede.

2. *Belastingen*

De belastingen van de draagconstructie door het eigen gewicht worden meestal nauwkeurig in rekening gebracht. Allerlei andere belastingen die wel of niet kunnen optreden, worden meestal als een geïdealiseerde gelijkmatig verdeelde belasting in rekening gebracht, die aan de voorschriften is te ontlezen.

3. *Materiaaleigenschappen*

De materiaaleigenschappen qua vervorming en sterkte worden in de elementaire toegepaste mechanica vrij sterk geïdealiseerd.

De massa's – dus de gewichten – worden vrij nauwkeurig aangehouden; hetzelfde geldt voor de uitzettingscoëfficiënten ten gevolge van de temperatuur.

Voor alle toegepaste schematiseringen geldt in feite maar één hoofdregel: controleer aan het eind van de uitgevoerde berekening – aan de hand van de uitkomsten – of de aannamen van de schematisering terecht zijn gedaan. Zo niet, neem dan passende maatregelen.

4.2.1 ALGEMEEN

Bij de constructie van een gebouw kunnen we niet zomaar allerlei onderdelen overeind zetten en op elkaar stapelen om wanden, vloeren en andere gebouwdelen te vormen, zoals dat bij een maquette van polystyreenschuim zo gemakkelijk gaat. We zullen terdege moeten nagaan of het te maken gebouw met zijn onderdelen aan een groot aantal eisen voldoet.

In dit betoog zullen we alleen die eisen uit de voorschriften beschouwen die volgen uit de krachtwerving. Op een gebouw kunnen allerlei krachten werken die, hetzij direct, hetzij via verschillende onderdelen van het gebouw, allemaal naar de ondergrond moeten worden afgevoerd. De aarde zelf is voor (normale) bouwwerken immers het enige lichaam dat onbeperkt reactiekrachten kan leveren.

In de bouwvoorschriften zijn hierover gedetailleerde regels opgesteld. Door nieuwe technische ontwikkelingen en zich wijzigende inzichten zijn de voorschriften elke 10 à 20 jaar aan een herziening toe.

In 1991 is een nieuwe serie bouwvoorschriften van kracht geworden. Ze worden aangeduid als 'Technische Grondslagen voor Bouwconstructies 1990', afgekort TGB 1990.

Ze bestaan uit een drietal delen met algemene onderwerpen en een zestal delen waarin de verschillende *materialen* voor bouwconstructies worden behandeld, zie tabel 1.

Naar verwachting zullen deze normen in de toekomst weer worden vervangen door Europese normen.

De hoofdregels voor het maken van een mechanisch deugdelijke constructie zijn echter in drie 'basisgeboden' samen te vatten:

1. de constructie moet voldoende *sterk* zijn,
2. de constructie moet voldoende *stijf* zijn,
3. de constructie moet *stabiel* zijn.

We zullen deze regels verduidelijken aan de hand van een uiterst eenvoudige constructie; een plank over een sloot, zie fig. 1. Hierbij zullen we ons van de letterlijke tekst van de voorschriften niet veel aantrekken en onze eigen regels formuleren voor dit éne geval. Maar we zullen wel in de geest van de voorschriften te werk gaan.

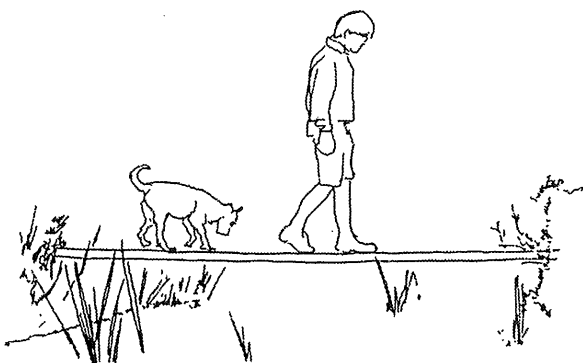


Fig. 1 Plank over een sloot

TABEL 1

OVERZICHT TGB 1990

Algemene basiseisen	NEN 6700
Namen en symbolen voor grootheden	NEN 6701
Belastingen en vervormingen	NEN 6702
Aluminiumconstructies	NEN 6710
Betonconstructies	NEN 6720
Geotechniek (grond)	NEN 6740
Houtconstructies	NEN 6760
Staalconstructies	NEN 6770
Steenconstructies	NEN 6790

4.2.2 STERKTE

De plank is in principe bestemd om één persoon de gelegenheid te bieden van de ene kant van de sloot naar de andere kant te gaan. Hierbij mag de plank niet in tweeën breken, waardoor de persoon in de sloot belandt, zie fig. 2.

Het is dan wel zo handig als de plank wat reservecapaciteit heeft, zodat er ook twee of drie personen op kunnen staan voordat de plank breekt. Verwachten we dat een aantal kinderen van de plank gebruik wil maken, dan kunnen we maar beter nagaan hoeveel kinderen er maximaal op de plank kunnen staan of zitten. Willen we met een beladen kruiwagen over de plank, dan zal ook dit gewicht terdege meetellen.

Men moet er zich dus altijd rekenschap van geven welke belastingen maximaal te verwachten zijn. Het is overigens niet de bedoeling dat de plank dan juist bij deze maximale belasting bezwijkt. De uiterste draagkracht zal een stuk hoger moeten liggen.

De enige sport waarbij de mens zijn eigen uiterste draagkracht bepaalt is het gewichtheffen. Volgens een bepaald ritueel moet het gewicht omhoog worden getild en enkele seconden in de geheven stand worden gehouden. De bedoeling van het trainen is dit niet alleen te kunnen herhalen, maar ook om de uiterste draagkracht van het lichaam geleidelijk op te voeren.

Bij constructies blijkt het echter gemakkelijker te zijn om de belasting te berekenen waarbij de constructie juist wél bezwijkt en dit de uiterste draagkracht te noemen.

Bij alle berekeningen volgens de voorschriften wordt dit dan ook voorgeschreven.

Deze bezwijkbelasting (breukbelasting) wordt aangeduid met F_u (u = ultimate).

Zoals gezegd zal de werkelijk optredende maximale belasting (d.w.z. de maximaal te verwachten belasting) hier een stuk onder moeten blijven. Deze belasting wordt aangeduid als de rekenwaarde van de belasting F_d (d = design).

De verhouding F_u/F_d moet dan in elk geval (een stuk) groter zijn dan 1. Afhankelijk van de belangrijkheid van het beschouwde onderdeel en de aard van de belasting geven de voorschriften hieromtrent numerieke waarden.

De wijze waarop dergelijke berekeningen worden uitgevoerd laten we voorlopig buiten beschouwing. Het berekenen van bouwconstructies wordt uitgevoerd door specialisten, meestal civiel-technici, die *constructeurs* worden genoemd.

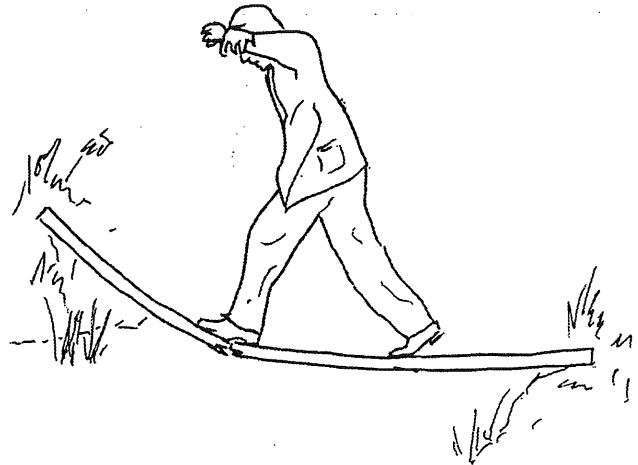


Fig. 2 Plank over een sloot met onvoldoende sterkte

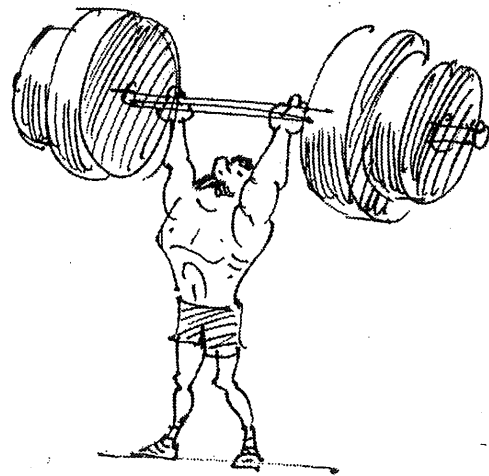


Fig. 3 Bepaling van de uiterste draagkracht (O. Dicke)

4.2.3 STIJFHEID

Onder voldoende *stijfheid* wordt verstaan dat de vervorming – in ons geval de doorbuiging van de plank – niet te groot wordt.

In eerste instantie zal de doorbuiging van de plank ons een zorg zijn. Het is natuurlijk wel prettig dat de doorbuiging niet zodanig groot is, dat we natte voeten halen, of dat we een kruitwagen niet tegen de helling op kunnen duwen.

Aan grote doorbuigingen zit echter nog een geheel ander aspect.

Als de doorbuiging van de plank onder de belasting van een persoon groot is, kan de plank door het belopen gemakkelijk in trilling geraken, dat wil zeggen, op en neer gaan bewegen. Deze trillingen kunnen door het loopritme belangrijk worden vergroot, waardoor het belopen zeer onaangenaam wordt en de betreffende persoon zelfs zijn evenwicht kan verliezen.

Bovendien zijn we niet gewend aan bewegende bouwconstructies (alleen in pretparken suggereren we onszelf dat een dergelijke belevenis prettig is). Hierdoor kan de vrees ontstaan dat dan ook de sterkte van de constructie onvoldoende zal zijn.

Ook uit esthetische overwegingen worden beperkingen aan de doorbuigingen gesteld (globaal niet meer dan $1/250$ van de overspanning). Dergelijke eisen kunnen voor een plank over een sloot uiteraard buiten beschouwing blijven.

In het voorbeeld van fig. 1 heeft de plank een overspanning van 3,50 m. Uit esthetische overwegingen zou de doorbuiging dan mogen bedragen: $3500 \text{ mm} / 250 = 14 \text{ mm}$.

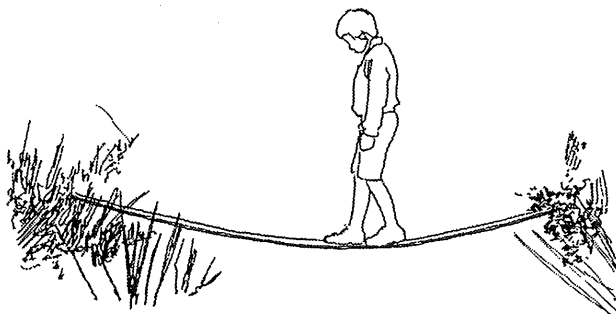


Fig. 1 De plank mag niet te *slap* zijn; met andere woorden: hij moet voldoende *stijf* zijn

De plank heeft een overspanning van 3,50 m, een dikte van 20 mm en een breedte van 200 mm.

Onder het gewicht van de jongen (0,4 kN) blijkt de maximale doorbuiging ongeveer $1/10$ van de overspanning te bedragen, dus ca. 350 mm.

In gebouwen worden vaak scheidingswanden op vloeren en balken gemetseld. Als de laatstgenoemde onderdelen te sterk doorbuigen door hun eigen gewicht en/of het gewicht van de scheidingswanden, dan kunnen de wanden deze doorbuigingen moeilijk volgen, waardoor scheurvorming in de wanden kan ontstaan.

4.2.4 STABILITEIT

Uitgaande van de onder [070] genoemde 'basisgeboden' wordt nu aangenomen dat de sterkte van de plank ruimschoots voldoende is en dat ook de stijfheid van de plank geen reden tot klachten geeft. Stabiliteit houdt dan in dat de plank met zijn levende last niet zomaar mag omkiepen, zie fig. 2.



Fig. 2 Onvoldoende stabiliteit

Stel dat de randen van de sloot een beetje drassig zijn en we twee stenen onder elk einde van de plank hebben gelegd, waarvan er één een stukje is verzakt zodat de plank maar op drie stenen rust. Als we daar in de buurt iets teveel op de zijkant gaan staan, zal de plank geheel of gedeeltelijk omkiepen, zodat de onfortuinlijke wandelaar vrijwel zeker in de sloot zal belanden.

Dit soort stabiliteits-beschouwingen is in feite reeds behandeld in [044 t/m 046]. Het enige verschil is dat daar alleen het eigen gewicht van het blok werd beschouwd, terwijl hier het eigen gewicht van het platte 'blok' (de plank dus) kan worden verwaarloosd ten opzichte van de belasting door een persoon.

4.2.5 BEREKENINGEN

Om uitspraken te kunnen doen over de eisen die in de voorschriften worden gesteld over sterkte, stijfheid en stabiliteit, moet een groot aantal berekeningen worden afgewerkt.

De bouwkundig ingenieur is niet de eerst-aangewezene om deze berekeningen allemaal uit te voeren. Maar hij moet hierover wel 'aanspreekbaar' zijn en hij moet met de constructeur overleg kunnen voeren.

Daarom moet de bouwkundig ingenieur toch de hoofdlijnen van het rekenschema kunnen volgen. Dit zal in de hierna volgende hoofdstukken geleidelijk worden opgebouwd.

Als eerste komt hierbij aan de orde welke belastingen er zoal op een gebouw kunnen werken en hoe deze krachten rechtstreeks of 'via-via' aan de ondergrond kunnen worden afgedragen.

4.3.1 ALGEMEEN

Belastingen kunnen worden onderscheiden in twee hoofdgroepen:

1. permanente belastingen
2. veranderlijke belastingen

Permanente belastingen zijn – zoals het woord al zegt – permanent aanwezig.

Het eigen gewicht van het gebouw is hierbij verreweg het belangrijkste.

Veranderlijke belastingen kunnen al dan niet aanwezig zijn: mensen, meubels, goederen, sneeuw op daken.

De hiervoor genoemde belastingen zijn allemaal 'zwaartekrachts-belastingen'. Veranderlijke belastingen kunnen echter ook andere oorzaken hebben. Men kan hierbij denken aan wind, brand, ontploffingen of aanrijdingen. De drie laatstgenoemde belastingen worden aangeduid als *bijzondere* belastingen. Ze hebben een groot effect op het gebouw, maar de kans dat ze zullen optreden is zeer klein.

4.3.2 PERMANENTE BELASTINGEN

Zoals reeds werd vermeld, is het eigen gewicht van een gebouw verreweg de belangrijkste belasting. Als de geometrie van het gebouw bekend is, en ook de toe te passen bouwmaterialen zijn gekozen – zodat de soortelijke massa's bekend zijn – dan levert het geen enkel probleem op, om een gebouw in elementaire moten te verdelen en voor elke moot na te gaan welke kracht die veroorzaakt. In fig. 1 is een voorbeeld van een constructie gegeven waarbij deze gewichten zijn bijgeschreven.

Een rechthoekige 'moot' van het een of andere materiaal met afmetingen $b \times l \times h$ en een soortelijke massa ρ veroorzaakt een kracht:

$$F = b l h * \rho g \text{ Newton}$$

Eenheden-controle:

$$F = b * l * h * \rho * g$$

$$\text{m m m kg/m}^3 \text{ m/s}^2 = \text{kgm/s}^2 = \text{Newton}$$

In de voorschriften TGB 1990 is ter vereenvoudiging niet gewerkt met de soortelijke massa in kg/m^3 , maar met het volumegewicht in kN/m^3 . Het volumegewicht wordt aangegeven door het symbool γ , er geldt dus: $\gamma = \rho g$. Tabel 2 [075] geeft een beknopt overzicht van het volumegewicht van enkele veel voorkomende bouwmaterialen.



1

Fig. 1

Gewichten (massa's) van de diverse constructie-onderdelen van de eerste van Brienoordbrug. Situatie kort voor de ingebruikstelling.

Vloeren hebben meestal een constante dikte. De belasting door het eigen gewicht per (eenheid van) oppervlakte wordt dan weergegeven door het symbool p , zie fig. 2a.

$$p = h \gamma \text{ kN/m}^2$$

Eenheden-controle:

$$p = 1 * 1 * h \text{ m} * \gamma \text{ kN/m}^3 = h \gamma \text{ kN/m}^2$$

Bij de berekening van een vloer tracht men zo mogelijk een strook van de vloer te beschouwen in de richting waarin de belasting moet worden afgedragen, zie fig. 2a. Bij projectie op een verticaal vlak heeft men dan te maken met een belasting per strekkende meter (aangegeven als m'). Deze belasting wordt altijd aangegeven met q ; fig. 2b, c.

Indien de breedte van de beschouwde strook gelijk is aan b m, dan geldt:

$$q = b h \gamma \text{ kN/m'}$$

Eenheden-controle:

$$q = b \text{ m} * 1 * h \text{ m} * \gamma \text{ kN/m}^3 = b h \gamma \text{ kN/m'}$$

Bij voorkeur kiest men: $b = 1 \text{ m}$.

Bij een balk met een willekeurige dwarsdoorsnede die een oppervlakte bezit van $A \text{ m}^2$, is de belasting door het eigen gewicht gelijk aan, zie fig. 2d:

$$q = A \text{ m}^2 * 1 * \gamma \text{ kN/m}^3 = A \gamma \text{ kN/m'}$$

Ook voor deze balk kunnen we weer het schema van fig. 2c aanhouden, hoewel we eigenlijk nabij de opleggingen een grotere belasting in rekening zouden moeten brengen.

TABEL 2

Volume gewichten γ van enkele veel voorkomende bouwmaterialen in kN/m^3 (NEN 6702)

hout	5 - 7,5	
metselwerk	17 - 20	
beton	23 - 25,5	(24)
natuursteen	27 - 28,5	
glas	25	
aluminium	27	
staal	77	
grind, zand (droog)	16 - 16,5	
aarde (droog)	16	
aarde (nat)	20	
water	10	

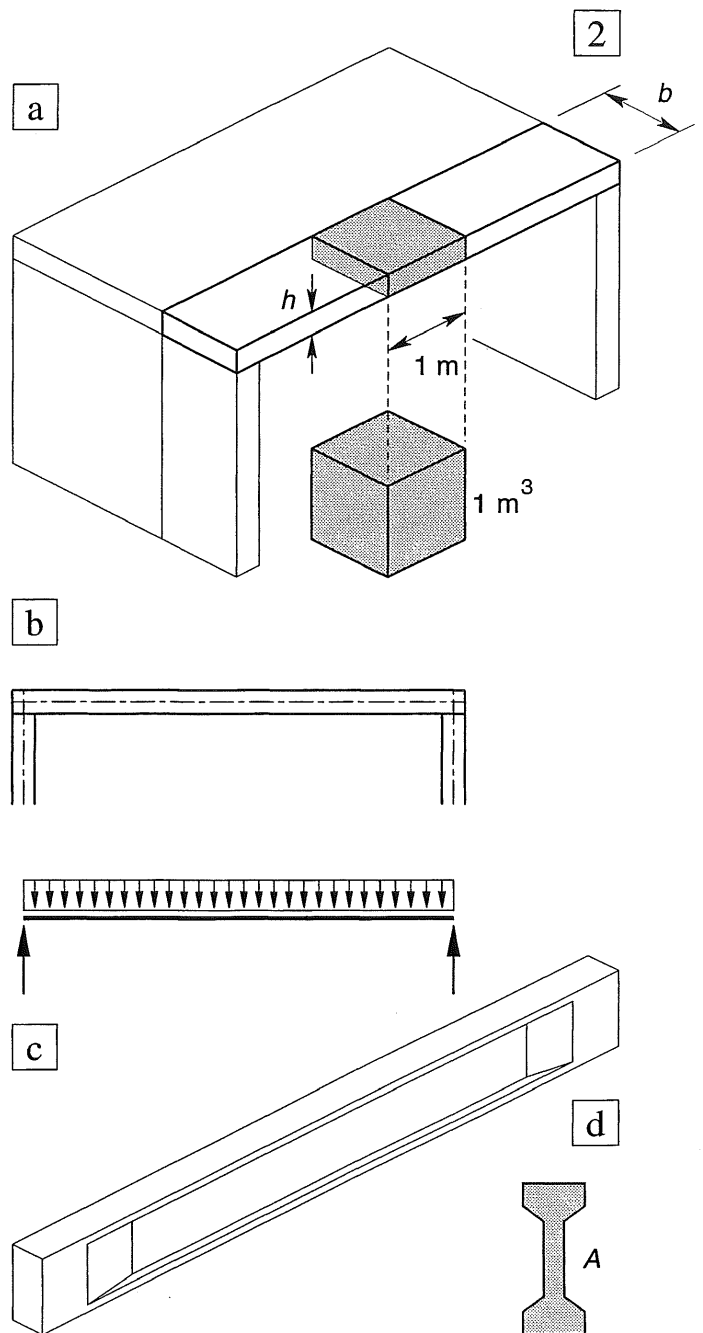


Fig. 2 Belasting door het eigen gewicht

- Strook van een vloer in de richting waarin de belasting moet worden afgedragen
- Aanzicht vloerstrook
- Schema voor de belasting
- Prefab betonligger met verzwaarde uiteinden

Bij de overgang van b. naar c. vindt een functiesplitsing plaats. De dikke lijn stelt de (gewichtsloze) ligger voor; de daarop geplaatste rechthoek met verticale pijltjes de gelijkmatig verdeelde belasting.

4.3.3 VERANDERLIJKE BELASTING ;
PERSONEN EN MEUBILAIR

In vrijwel alle gebouwen verblijven mensen en lopen mensen in en uit. Het is onbegonnen werk om al deze mensen, die zich in allerlei 'samen-schelingen' in het gebouw kunnen bevinden, stuk voor stuk als 'puntlasten' te beschouwen en hiermee te gaan rekenen, zie fig. 1.

We nemen gemakshalve maar aan dat de mensen volkomen regelmatig in een gebouw zijn verdeeld en wel in een 'pakkingsdichtheid' die in werkelijkheid niet vaak zal voorkomen.

In tabel 3 is een overzicht gegeven van enkele extreme veranderlijke belastingen die volgens de TGB 1990 voor vloeren moeten worden aangehouden. Bij zeer dicht opeengepakte mensen-massa's – waarvoor de term 'als haringen in een ton' wel wordt gebruikt – zal een dichtheid van 10 mensen per m² niet vaak worden overschreden. Stellen we het gemiddelde gewicht van de aanwezigen gelijk aan 75 kg, dan bedraagt deze belasting per m² :

$$p = 10 * 750 = 7500 \text{ N/m}^2 = 7,5 \text{ kN/m}^2.$$

Zover heeft men zelfs bij danszalen niet willen gaan, zie tabel 3. Er zal immers ook ruimte om te zitten noodzakelijk zijn, waardoor de pakkingsdichtheid snel afneemt.

De extreme belastingen worden in de TGB aangeduid als *representatieve* belastingen p_{rep} .

Bij woningen moet men volgens de voorschriften uitgaan van $p_{rep} = 1,75 \text{ kN/m}^2$. Bij een kamer van $4 \times 5 \text{ m}^2$ betekent dit altijd nog een bezetting met 47 personen. Uiteraard moet bij deze belasting ook het aandeel van de meubels worden inbegrepen. Het komt de krachtswerking in vloeren echter zeer ten goede, dat zware meubels bij voorkeur langs de wanden worden geplaatst, zie KW-2.

TABEL 3

Veranderlijke belastingen op vloeren volgens NEN 6702 (uittreksel).

Representatieve belasting p_{rep} in kN/m²

Momentane (= gemiddelde) belasting: ψp_{rep}

	p_{rep}	ψ
Woonhuizen	1,75	0,40
Kantoren, scholen, ziekenhuizen, hotels	2,50	0,50
Winkels, warenhuizen	4,00	0,40
Bijeenkomstgebouwen, sport- en horecagebouwen	5,00	0,25

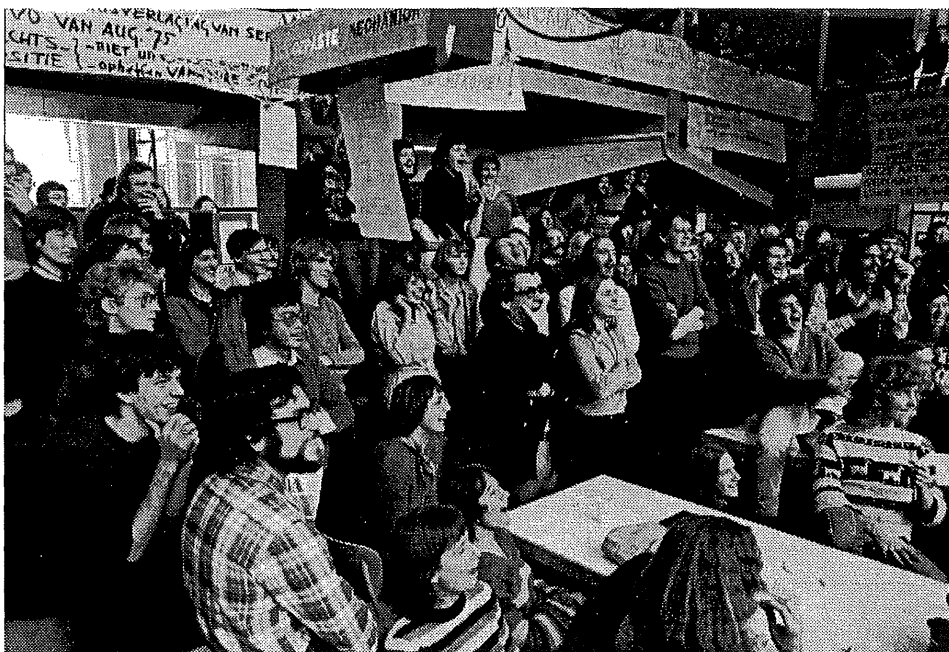


Fig. 1
Belasting op vloeren
Toeschouwers tijdens een
'balsa show'.

Deelnemers van de studiegroepen toegepaste mechanica konden hun kennis van het vak toetsen door het vervaardigen van een overspanningsconstructie die werd samengesteld uit 12 latjes balsahout en een onbepakt aantal spelden. De sterkte van de modellen werd bepaald door ze tot breuk te belasten.

4.3.4 ANDERE GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTINGEN

Het is nuttig zich te realiseren dat een belasting van 1 kN/m^2 overeenkomt met het gewicht van een laag water van $0,1 \text{ m}$. Sneeuwbelasting op platte daken bijv. wordt niet hoger aangenomen dan $0,7 \text{ kN/m}^2$.

Wie de vloer vol wil leggen met waterbedden, enkele grote aquaria, of een zware brandkast in de kamer wil installeren, kan maar beter nagaan of de hieruit volgende belastingen redelijkerwijs nog zijn inbegrepen in de belasting volgens de voorschriften.

Het gewicht van papier in bibliotheken en archieven kan eveneens hoog zijn. Bij opslag in rekken zou men met vakken kunnen rekenen die elk een vrij hoge gelijkmatig verdeelde belasting hebben. Het is echter gebruikelijk om ook in zulke gevallen maar net te doen alsof alle papier gelijkmatig over het gehele vloeroppervlak is verdeeld (zie NEN 6702).

Zelfs als op een vloer dunne scheidingswandjes zijn gemetseld – die meestal als een permanente belasting kunnen worden beschouwd (zo dikwijls worden ze nu ook weer niet afgebroken en elders opgemetseld) – denkt men zich het totale gewicht toch weer over de gehele vloer 'uitgesmeerd'.

Het hangt in sterke mate af van de inzichten van de constructeur, hoe hij de belasting zal schematiseren.

Dit wordt mede beïnvloed door de mogelijkheden die hij zelf heeft om een bepaalde belasting gemakkelijk in een (computer)berekening te kunnen invoeren.

Uit het voorgaande moge blijken dat de neiging bestaat om zoveel mogelijk met gelijkmatig verdeelde belastingen te werken en alleen puntlasten te introduceren bij sterk geconcentreerde hoge belastingen, zoals die bijv. bij de opleggingen van constructiedelen optreden.

Voor *grafische* berekeningen is het echter noodzakelijk om een gelijkmatig verdeelde belasting weer te vervangen door een regelmatig stramien van puntlasten, zie KW-1.

Maar ook bij *analytische* berekeningen is de gehele berekeningsgang bij het gebruik van puntlasten – zeker voor de beginner – wat overzichtelijker en het kan ook nog andere voordelen bieden, zie KW-2.

Het voorgaande is dan ook de reden dat bij een aantal berekeningsvoorbeelden een wat grotere plaats aan puntlasten is ingeruimd dan ze eigenlijk toekomt.

Na enige oefening zal men bemerken dat de verschillen in aanpak tussen beide methoden maar gering zijn en dat men gemakkelijk gelijkmatig verdeelde belastingen door een serie puntlasten kan vervangen en omgekeerd, zonder dat de hoofdkrachtenwerking hierdoor noemenswaard verandert.



Fig. 2 Sneeuwbelasting

4.3.5 WINDBELASTING

Ook de windbelasting behoort tot de veranderlijke belastingen. Windbelastingen treden op in vlagen. Hierdoor kunnen in korte tijd vrij grote variaties in winddruk optreden. Dit kunnen zowel overdrukken als onderdrukken zijn. De in rekening te brengen belastingen (stuwdruk) zijn gebaseerd op maximale vlaagsnelheden die eens in de 50 jaar zullen worden overschreden.

De windbelasting is in de kustprovincies hoger dan landinwaarts en hangt mede af van de bebouwingdichtheid. Voorts neemt de windbelasting toe met de hoogte en is ook afhankelijk van de vorm van het gebouw.

In de TGB-1990 wordt Nederland in drie windsnelheidsgebieden verdeeld:

- I de kop van Noord Holland en de Waddeneilanden,
- II de overige kustprovincies en de IJsselmeerpolders,
- III alle overige provincies.

De gebieden op het vaste land volgen de provinciegrenzen, waardoor de scheiding tussen de gebieden II en III wat grillig verloopt.

De extreme stuwdruk p_w als functie van de hoogte en het windsnelheidsgebied is af te lezen uit een tabel in het voorschrift, zie tabel 4.

Fig. 3 is eveneens op deze tabel gebaseerd.

Voor bebouwd gebied wordt van 2 m tot 9 m hoogte een constante stuwdruk aangehouden die volgt uit die voor een hoogte van 2 m.

Tussen 10 en 50 m volgt dan een verloop tot de stuwdruk die geldt voor onbebouwd gebied.

Over het algemeen wordt uitgegaan van de stuwdruk aan de top van het gebouw. Deze belasting wordt dan als een gelijkmatig verdeelde belasting over de gehele hoogte van het gebouw aangehouden indien geldt:

$h < b$, zie fig. 2a.

Voor $h > b$ zijn de regels wat milder. Beneden een hoogte $h' = b$ moet de stuwdruk constant worden aangenomen, daarboven mag men het drukverloop volgens fig. 2b aanhouden.

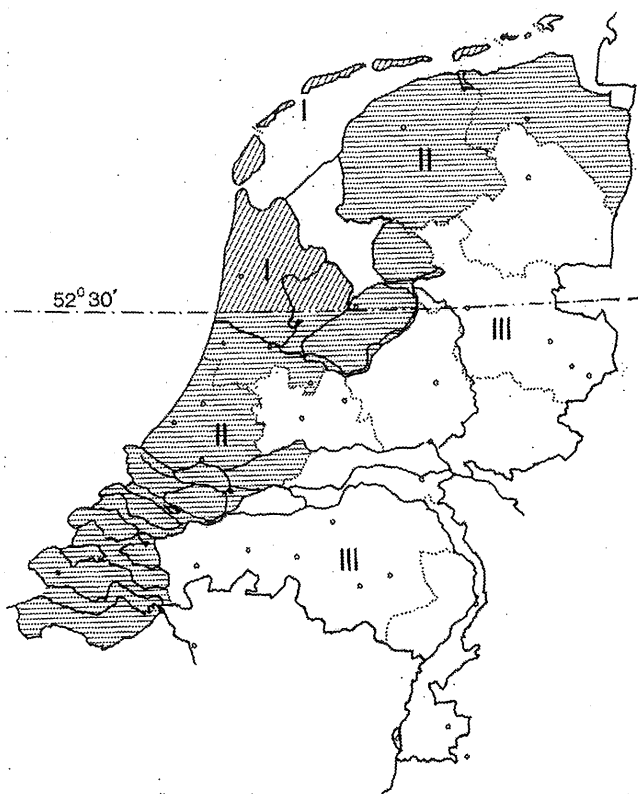


Fig. 1 Verdeling van Nederland in drie windsnelheidsgebieden

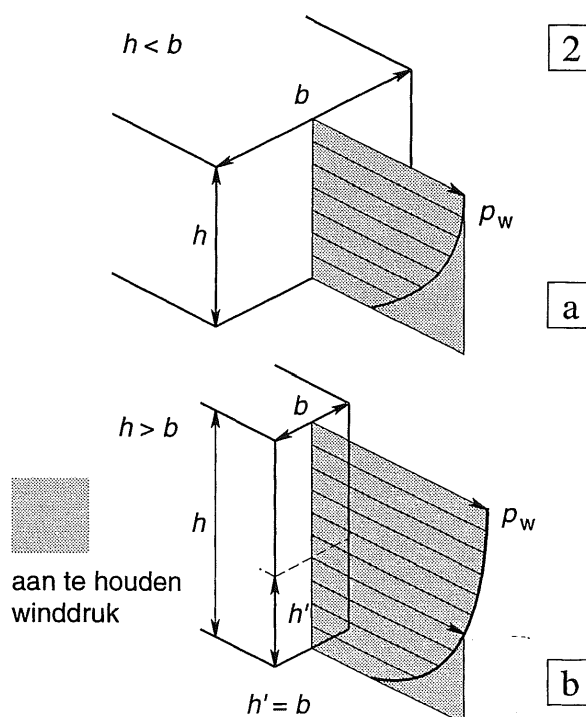


Fig. 2 Aan te houden stuwdruk bij een gebouw
a. $h < b$ b. $h > b$

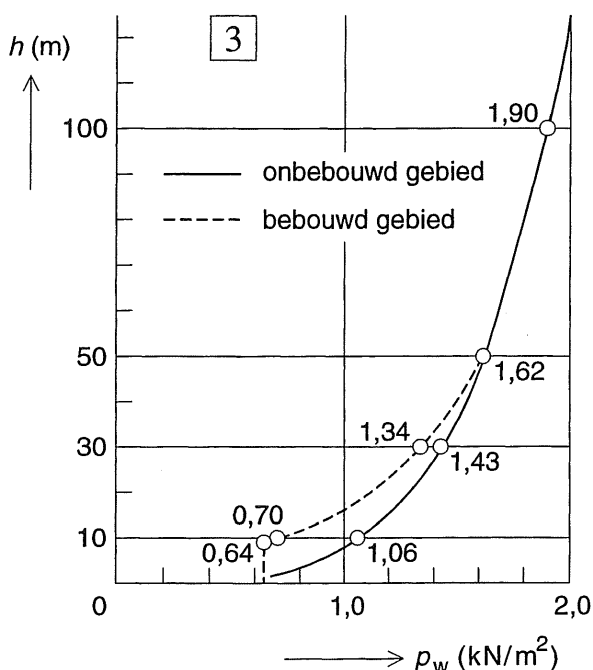


Fig. 3 Stuwdruk p_w als functie van de hoogte
Verloop van de stuwdruk voor gebied I

Windvormfactoren

Voor de bepaling van de extreme winddruk p_{rep} moeten een aantal windvormfactoren C in rekening worden gebracht, waarvan de factor C_{pe} voor de uitwendige druk en zuiging op de buitenvlakken van een gebouw de belangrijkste is.

Deze waarden zijn voor de loefzijde (windzijde) en de lijzijde verschillend. Hetzelfde geldt voor schuine daken. Nadere gegevens zijn te ontleen aan de wel zeer gedetailleerd uitgevallen voorschriften (NEN 6702).

In fig. 4 zijn de factoren C_{pe} weergegeven voor een eenvoudige doorsnede van een gebouw. Voor dakhellingen tussen 25° en 40° moet aan de windzijde zowel op over- als op onderdruk worden gerekend; bij platte (lichte) daken moet op onderdruk worden gerekend (opwaaien).

De totale kracht op een gevel is gelijk aan:

$$F_d = A p_{rep} = A C_{pe} p_w$$

(+ = druk; - = zuiging)

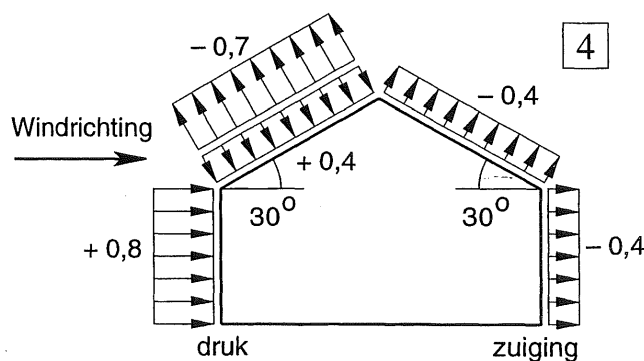
Fig. 4 Numerieke waarde van de windvormfactoren C_{pe} voor een eenvoudig bouwwerkje

h (m)	I		II		III	
	o	b	o	b	o	b
2	0,64	0,64	0,54	0,54	0,46	0,46
3	0,70	0,64	0,54	0,54	0,46	0,46
4	0,78	0,64	0,62	0,54	0,49	0,46
5	0,84	0,64	0,68	0,54	0,55	0,46
6	0,90	0,64	0,73	0,54	0,59	0,46
7	0,95	0,64	0,78	0,54	0,63	0,46
8	0,99	0,64	0,81	0,54	0,67	0,46
9	1,02	0,64	0,85	0,54	0,70	0,46
10	1,06	0,70	0,88	0,59	0,73	0,50
15	1,19	0,94	1,01	0,79	0,84	0,67
20	1,29	1,11	1,10	0,93	0,93	0,79
25	1,37	1,23	1,18	1,03	1,00	0,88
30	1,43	1,34	1,24	1,12	1,06	0,95
35	1,49	1,43	1,30	1,20	1,11	1,02
40	1,54	1,50	1,35	1,26	1,15	1,07
45	1,58	1,57	1,39	1,32	1,19	1,12
50	1,62	1,62	1,43	1,37	1,23	1,16
55	1,66	1,66	1,46	1,42	1,26	1,20
60	1,69	1,69	1,50	1,46	1,29	1,24
65	1,73	1,73	1,53	1,50	1,32	1,27
70	1,76	1,76	1,56	1,54	1,34	1,31
75	1,78	1,78	1,58	1,57	1,37	1,33
80	1,81	1,81	1,61	1,60	1,39	1,36
85	1,83	1,83	1,63	1,63	1,41	1,39
90	1,86	1,86	1,65	1,65	1,43	1,41
95	1,88	1,88	1,68	1,68	1,45	1,44
100	1,90	1,90	1,70	1,70	1,47	1,46
110	1,94	1,94	1,74	1,74	1,51	1,50
120	1,98	1,98	1,77	1,77	1,54	1,54
130	2,01	2,01	1,80	1,80	1,57	1,57
140	2,04	2,04	1,83	1,83	1,60	1,60
150	2,07	2,07	1,86	1,86	1,62	1,62

TABEL 4 Stuwdruk p_w in kN/m^2

h = hoogte in m

o = onbebouwd b = bebouwd



4.3.6 BIJZONDERE BELASTINGEN

Belastingen die een groot effect hebben op de constructie, maar waarvan de kans dat zij optreden heel klein is, worden *bijzondere* belastingen genoemd.

De gevolgen van bijzondere belastingen kunnen op tweeërlei wijze worden opgevangen:

- Het bouwwerk wordt zodanig ontworpen dat het bezwijken van een onderdeel geen voortgaand bezwijken van de aangrenzende delen of zelfs van het gehele gebouw tot gevolg heeft.
- Het bouwwerk wordt zo sterk en stijf gemaakt dat de te verwachten bijzondere belastingen kunnen worden opgenomen.

Bij een flatgebouw zal men de onder a. genoemde gedragslijn volgen, bij een bunker die onder b.

In 1967 heeft in London de gasexplosie in één woning van de hoogbouwflat 'Ronan Point' de verwoesting ingeleid van alle daarboven en daaronder liggende woningen, zie fig. 1. Zo'n kettingreactie wordt omschreven als 'progressive collapse', zie fig. 2.

In aardbevingsgebieden is het letterlijk een kwestie van levensbelang om zodanig te construeren dat het gebouw niet zal instorten, ook al wordt het min of meer ernstig beschadigd. Steenachtige gebouwen hebben in het algemeen een grote massa. Aardbevingen veroorzaken kortstondige grote versnellingen. Hierdoor kunnen zeer grote krachten worden veroorzaakt ($\text{kracht} = \text{massa} \times \text{versnelling}$) die veelal een verwoestende uitwerking hebben, vooral in achtergebleven gebieden waar nog geheel traditioneel wordt gebouwd.

Gebouwen dienen ook een zekere brandwerendheid te hebben. Na het ontstaan van een brand moet er voldoende tijd zijn dat mensen het gebouw kunnen verlaten, voordat het geheel of gedeeltelijk instort, zoals in fig. 3 op een wat afstandelijke wijze is weergegeven.

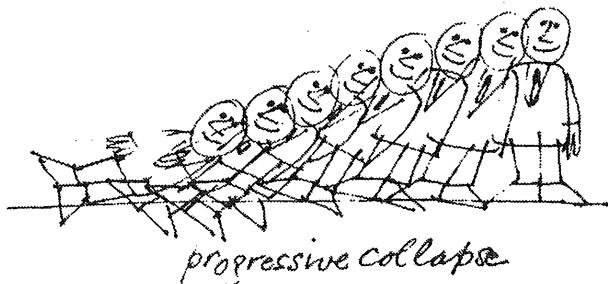
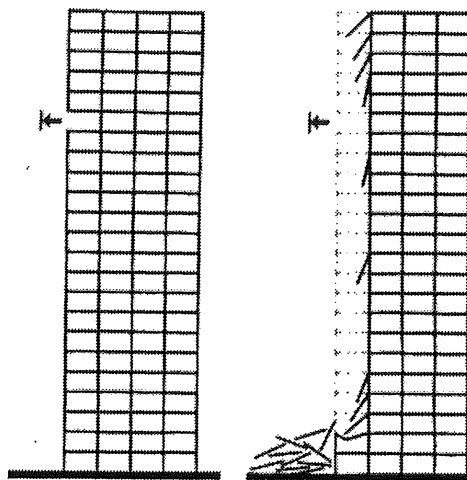


Fig. 2 Cartoon van O. Dicke



1

a



b

Fig. 1 Ronan Point { 5 }

- Gebouw na de gedeeltelijke instorting
- Schematische voorstelling van de instorting
Door een betrekkelijk kleine gasexplosie in de keuken van de 18e verdieping werd een stuk van de gevel van deze flat weggedrukt. Daardoor viel de ondersteuning van de bovengelegen vier flats weg. Deze flats stortten toen naar beneden en dit veroorzaakte een kettingreactie waardoor van alle 22 verdiepingen de hoekflats omlaag vielen.

{ 5 } Teleac Cursus Beton, deel 2
Utrecht 1972

4.3.7 INCASSERINGSVERMOGEN

De berekening van een constructie gebeurt in eerste instantie op sterkte; er moet worden aangetoond dat de constructie pas zal bezwijken als de maximaal te verwachten belasting met een bepaalde voorgeschreven belastingfactor wordt vermenigvuldigd [071].

Hierdoor heeft het gebouw een zeker 'incasseringsvermogen' verkregen. Er kunnen behalve de genoemde belastingen nog andere belastingen worden opgevangen, waar niet expliciet op is gerekend, zonder dat het gebouw direct ten gronde zal gaan.

Er is een duidelijke trend in de voorschriften om zoveel mogelijk invloeden in rekening te brengen, waardoor de belastingfactor aanwijsbaar lager is geworden dan voorheen. We dienen ons echter te realiseren dat het wel degelijk maatschappelijk wordt geaccepteerd dat een gebouw door extreme belastingen wordt verwoest. Dit kan zowel door natuurgeweld worden veroorzaakt als door menselijk handelen.

Zo is het veel te duur om alle woningen zodanig te construeren dat windhozen zonder meer kunnen worden weerstaan, zie fig. 4.

De schade die door zware stormen aan gebouwen ontstaat, is echter voor een deel terug te voeren op een onoordeelkundig ontwerp of een onoordeelkundige uitvoering.

Bij grote en langdurige overstromingen zal de golfslag een dusdanige zware belasting kunnen vormen dat ook hieraan gebouwen ten gronde gaan: stormvloed 1953.

Op zeer zware aanrijdingen, neerstortende vliegtuigen en oorlogshandelingen zijn onze gebouwen al evenmin berekend.

Bij grote gebouwen wordt echter als uitgangspunt gehanteerd dat geen 'progressive collapse' mag optreden. Het rechtstreeks getroffen onderdeel van het gebouw moet dan als verloren worden beschouwd, maar dit mag geen voortgaand bezwijken van het resterende deel van het gebouw tot gevolg hebben, zie fig. 1 en 2.

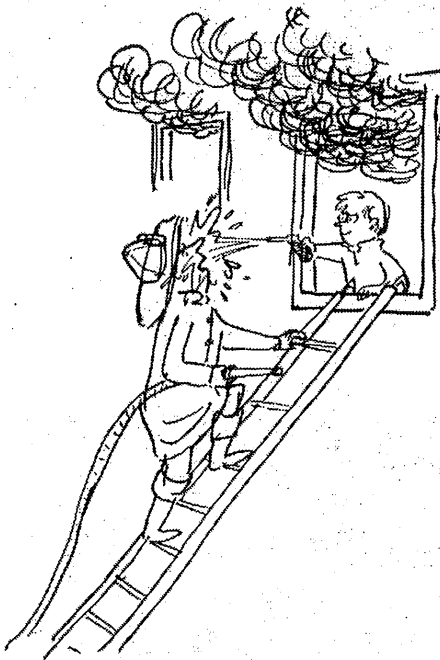


Fig. 3 Brandwerendheid (S. Cobean)



Fig. 4 Windhoos in Tricht, 1967

4.3.8 OPGELEGDE VERVORMINGEN

Als laatste moet nog worden gewezen op een tweetal 'verborgen' belastingen die gemakkelijk over het hoofd worden gezien. Eigenlijk zijn dit *opgelegde vervormingen*, maar het schade veroorzakende aspect is er niet minder om.

Ongelijkmatige zettingen (zakkingen) van de ondergrond veroorzaken bij een fundering 'op staal' [055] een verstoring van de continue ondersteuning.

Bij gemetselde gebouwen zal dit veelal scheurvorming tot gevolg hebben, zie fig. 1.

Temperatuurvariaties veroorzaken uitzetting en inkrimping van bouwmaterialen. Bij temperatuurverschillen (in hetzelfde materiaal), of een constante toename van de temperatuur (in verschillende materialen met ongelijke uitzettingscoëfficiënten), kunnen door de optredende vervormingen grote krachten ontstaan die scheurvorming tot gevolg hebben, zie [097].

Bij de genoemde gevallen behoeft de veiligheid niet meteen in gevaar te komen, maar het aanzien van het gebouw wordt geschaad en het gebouw zal in waarde dalen.

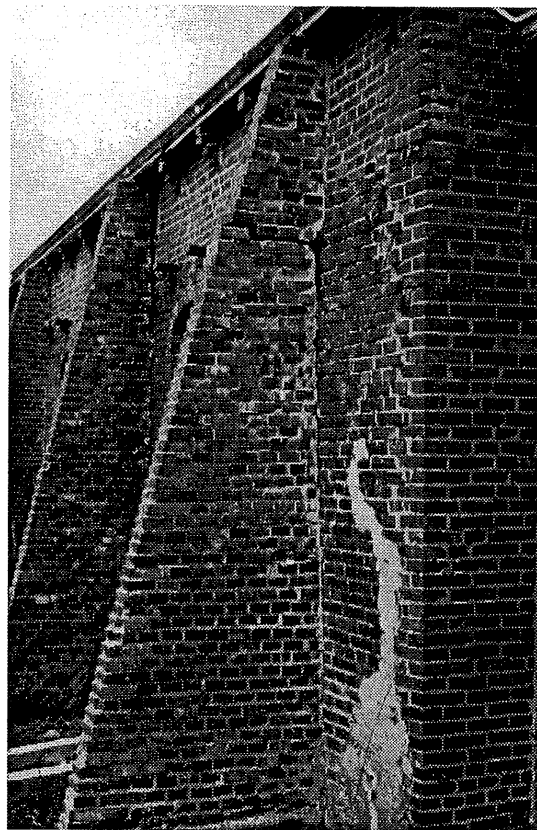


Fig. 1 Scheurvorming door ongelijkmatige zakking van de ondergrond

De steunbeer die de muur had moeten stutten is meer verzakt dan de muur, daardoor aan de muur gaan hangen en vervolgens gedeeltelijk losgescheurd



Fig. 2

Verzakking van een houten woning (Broek in Waterland)

Een houten woning kan zich gemakkelijker aanpassen, maar de ongelijkmatige zakking is wel overduidelijk zichtbaar.

4.4.1 ALGEMEEN

Gebouwen worden meestal uit een groot aantal constructie-onderdelen opgebouwd.

Sommige onderdelen zijn vooral bestemd om het 'geraamte' van het gebouw te vormen, waarlangs de krachten naar de ondergrond kunnen worden afgedragen. We noemen het samenstel van deze onderdelen de *draagconstructie*. Veelal is dit een beton- of staalskelet, zie fig. 3a. De berekening van dit soort skeletten – meestal aangeduid als raamwerken – wordt behandeld in KW-6.

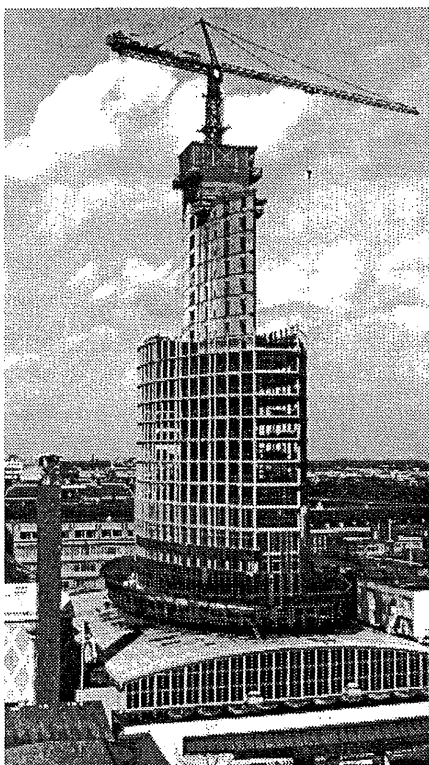
Andere onderdelen hebben slechts een afsluitende functie. Ze maken deel uit van de zgn. *afbouwconstructie* die de daarop werkende krachten meestal weer overbrengt naar de draagconstructie. Hiertoe behoren alle afsluitende wanden die in een beton- of staalskelet worden aangebracht, zie fig. 3b.

Bij de meeste woonhuizen en ook wel bij grotere gebouwen is er geen duidelijke functiescheiding tussen *dragen* en *afsluiten*. De wanden dienen dan zowel ter afsluiting van ruimten als voor de krachtsafdracht van eigen gewicht en andere belastingen naar de ondergrond.

Voor vloeren geldt deze dubbelfunctie altijd (dragen + afsluiten).

Aanvankelijk zullen we uitsluitend eenvoudige constructie-onderdelen beschouwen.

Hierbij wordt er tevens van uitgegaan dat het voor de bepaling van de krachtwerving voldoende is, als het betreffende constructie-onderdeel en de daarop werkende krachten op één en hetzelfde verticale vlak worden geprojecteerd. We kunnen dan net doen of alles zich in dit verticale vlak afspeelt.



3

a



b

Fig. 3 World Trade Center te Rotterdam { 6 }

a. Draagconstructie tijdens de bouw
duidelijk zichtbaar

b. Gebouw na voltooiing
{ 6 } Cement februari 1987

4.4.2 CONSTRUCTIE-ONDERDELEN

Men kan constructie-onderdelen in een drietal groepen verdelen, afhankelijk van de onderlinge hoofdafmetingen:

- 1 Blokvormige onderdelen, zie fig. 1. De drie hoofdafmetingen hebben dezelfde orde van grootte (blok van hoofdstuk 3)
- 2 Vlakke onderdelen zoals vloeren en wanden zie fig. 2. Eén hoofdafmeting – de dikte – is aanmerkelijk kleiner dan beide andere afmetingen (lengte en breedte).
- 3 Lijnvormige onderdelen zoals balken en kolommen, zie fig. 2 en 3. Eén hoofdafmeting – bij balken de lengte en bij kolommen de hoogte – is aanmerkelijk groter dan de beide andere afmetingen die tezamen de dwarsdoorsnede bepalen.

Vlakke en lijnvormige onderdelen kunnen ook gebogen zijn; maar hier houden we ons voorlopig nog niet mee bezig.

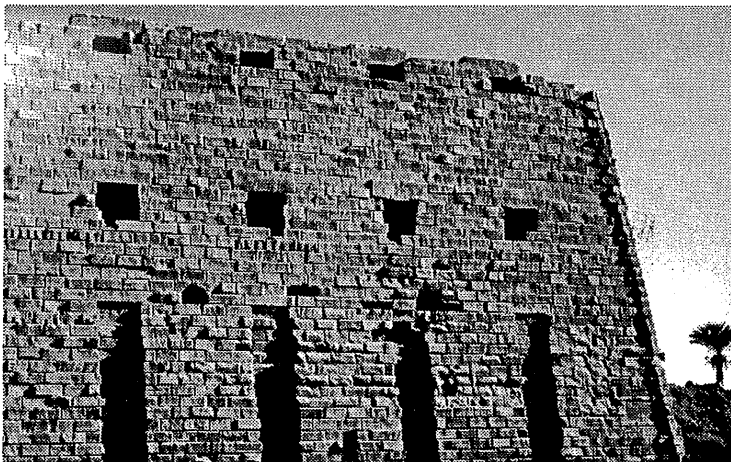


Fig. 1 Blokvormige onderdelen
Tempel in Karnak, Egypte

De wand in zijn totaal kan met enige goede wil weer worden opgevat als een vlak onderdeel, zij het met een vrij grote dikte

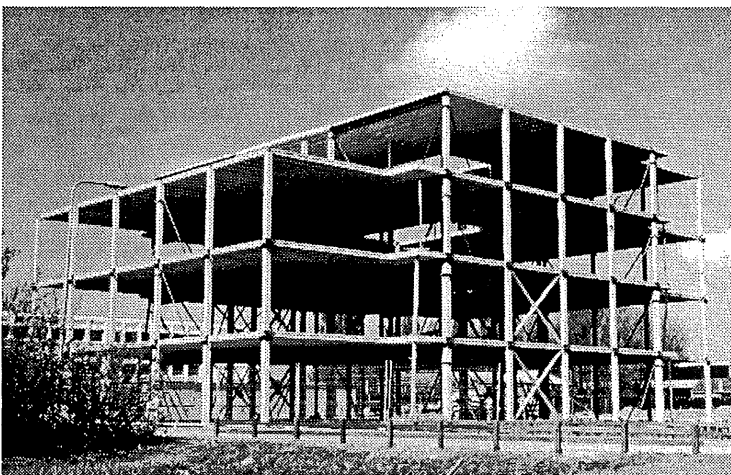


Fig. 2 Vlakke onderdelen bij een geprefabriceerd kantoorgebouw

Bij kantoren en scholen (utiliteitsbouw) worden vlakke en lijnvormige elementen meestal gecombineerd toegepast

In fig. 2 is systeem CD-20 toegepast.

Vlakke onderdelen:

horizontaal ; vloeren (voorgespannen)

verticaal ; stijve kern en zijwand
(traditioneel gewapend)

Lijnvormige onderdelen:

verticaal; kolommen

De verbindingen tussen de onderdelen zijn van staal; balken ontbreken

Blokvormige onderdelen

Blokvormige onderdelen komen in de hedendaagse bouw voor in kleine afmetingen als bouwstenen voor gemetselde muren, of als grote (verborgen) verankeringsblokken.

Bij historische bouwwerken kan men denken aan bouwwerken van de Inca's in Peru, Egyptische tempels of de tempels van Anchor Wat in Cambodja. In al deze gevallen zijn zeer grote natuurstenen blokken toegepast, zie fig. 1.

Vlakke onderdelen

Vlakke onderdelen worden bij gebouwen veel toegepast, zowel in horizontale zin (vloeren, meestal van beton) als in verticale zin (wanden van beton of metselwerk), zie fig. 2.

Bij vlakke onderdelen zijn de buitenafmetingen meestal rechthoekig. Wanden kunnen zijn voorzien van raam- en/of deuropeningen, vloeren meestal van trap- of liftgaten.

Lijnvormige onderdelen

Lijnvormige onderdelen komen eveneens zeer veel voor in de bouw. In horizontale richting zijn het balken van hout, van beton – gewapend of voorgespannen – of van staal. In verticale richting zijn het kolommen, waarbij voornamelijk beton, staal of metselwerk wordt toegepast, zie fig. 2 en 3.

Liggers en kolommen zijn meestal prismatisch van vorm (dat wil zeggen, ze hebben over de gehele lengte dezelfde doorsnede). Voor daken kan de hoogte lineair verlopen in lengterichting, zie fig. 3. De doorsnede-vorm zelf is echter sterk afhankelijk van het constructie-materiaal: hout, beton of staal, zie fig 4.

Behandeling van de diverse constructie-onderdelen in het dictaat

In KW-1 wordt de krachtswerking behandeld in koorden. Dit zijn lijnvormige *buigslappe* constructie-onderdelen, waarvan de geometrische vorm geheel wordt bepaald door de belasting. Met behulp van deze kennis kan een goed inzicht worden kregen in het gedrag van gestapelde en gemetselde steenachtige constructies, zoals bogen, koepels en gewelven, die uitstekend druk kunnen overbrengen, maar vrijwel geen trek.

In KW-2 worden liggers en staven behandeld (d.w.z. balken en kolommen). Dit zijn lijnvormige *buigstijve* constructie-onderdelen, waarvan de vorm weinig afhankelijk is van de belasting, maar de sterkte en de vervorming des te meer.

Pas daarna komen samenstellingen van lijnvormige onderdelen aan de orde, zoals:

- Vakwerken in KW-3
(de aansluitingen van de staven worden geacht geen momenten over te brengen)
- Doorgaande liggers en portalen in KW-5
(de aansluitingen van de liggers moeten nu wel momenten kunnen overbrengen)
- Raamwerken in KW-6; dit zijn beton- en staal-skeletten voor draagconstructies.
Hierbij wordt ingegaan op de samenhang van het gehele gebouw waarbij ook aandacht wordt geschonken aan vlakke constructie-onderdelen.

Bij berekeningen blijkt het zeer dikwijls mogelijk te zijn, om als het ware een 'moot' uit een vlak constructie-onderdeel te snijden en deze moot weer te beschouwen als een lijnvormig onderdeel, zie fig. [075-2].

Het komt ook voor dat de constructie op het eerste gezicht lijkt te bestaan uit vlakke constructie-onderdelen, maar dat bij een nadere beschouwing blijkt dat het geheel een aaneenschakeling is van lijnvormige constructie-onderdelen. Dit kan in fig. 3 het geval zijn nadat de dakplaten zijn aangebracht.

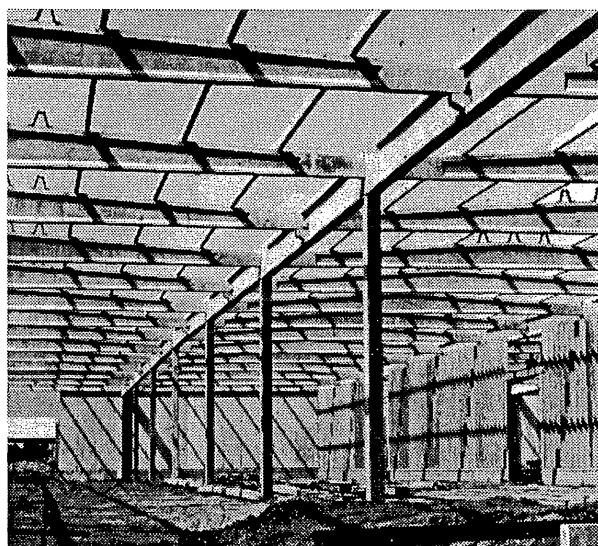


Fig. 3 Lijnvormige onderdelen

Hal vervaardigd van geprefabriceerde betonelementen. De kolommen en hoofdliggers bezitten een prismatische doorsnede, de dakbalken hebben een driehoekig verloop in lengterichting, de gordingen zijn weer prismatisch

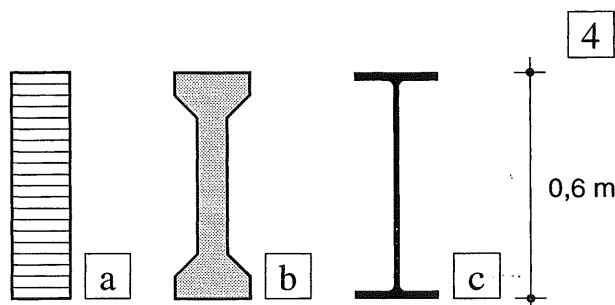


Fig. 4 Doorsnedevormen van prismatische liggers

- a. Gelamineerd houten balk
- b. Geprefabriceerde betonbalk
- c. Gewalst staalprofiel

4.4.3 SCHEMATISERING VAN DE CONSTRUCTIE-ONDERDELEN

Het drie-dimensionale karakter van een gebouw komt voorlopig alleen aan de orde bij de beschouwing van de stabiliteit van het gebouw als geheel, zie KW-3. Vergelijken we een en ander met de krachten die werken op het massieve blok van hoofdstuk 3, dan kan het gebouw in zijn totaliteit worden beschouwd als een hol blok, waarbij wanden en vloeren de uitwendige vorm aan het blok geven.

Maar dan moeten er wèl maatregelen zijn getroffen dat alle onderdelen tezamen één vormvast geheel vormen, zodat we geen los gestapeld kaartenhuis overhouden. Bij de bespreking van de stabiliteit van een tafel in [046], vormden de vier poten één vormvast geheel met het tafelblad. Het geheel kon dan ook worden beschouwd als een (hol) blok dat in drie of vier punten is ondersteund. Zetten we daarentegen vier losse poten overeind op de vloer en leggen we daar een tafelblad op, dan is de stabiliteit al verstoord als we er met de pink tegenaan duwen.

Voor de berekening van de stabiliteit wordt het gebouw met de daarop werkende windkrachten achtereenvolgens geprojecteerd op het horizontale vlak en de beide verticale projectievlakken. Per plat vlak kunnen dan weer de evenwichtsvoorwaarden worden toegepast. De windkrachten in x - en y -richting worden elk afzonderlijk beschouwd, zie fig. 1.

Vlakke constructie-onderdelen worden veelal ook als een vlakke rechthoek weergegeven, zie fig. 2. De dikte van het onderdeel wordt voor de evenwichtsbeschouwingen verder verwaarloosd en er wordt aangenomen dat verticale onderdelen in hetzelfde verticale vlak blijven. Er moeten dan wel maatregelen zijn genomen dat zo'n onderdeel niet zal kantelen.

Lijnvormige onderdelen worden vrijwel altijd geschematiseerd tot een (dikke) lijn. De dwarsafmetingen of de vorm van de dwarsdoorsnede doen hierbij nog niet ter zake, zie fig. [075-2]. Die komen pas in een later stadium bij de spannings- en doorbuigingsberekeningen aan de orde, zie KW-4. Indien ook horizontale krachten op een ligger aangrijpen, dan kan het bij wat hogere liggers soms wenselijk zijn om zowel de lengte als de hoogte van de ligger in de beschouwingen op te nemen, zoals dit bij de beschouwingen van het blok in hoofdstuk 3 steeds is gebeurd.

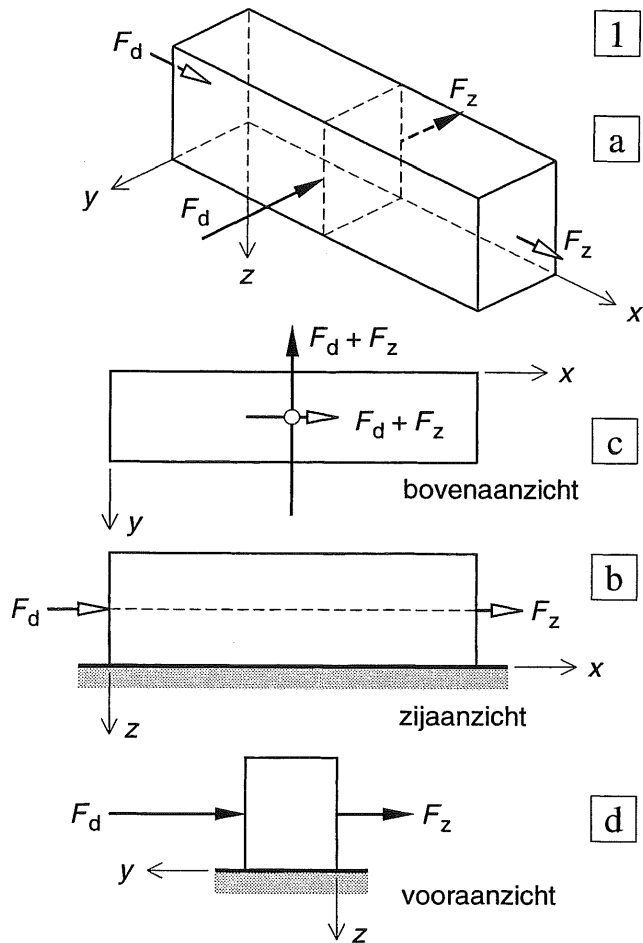


Fig. 1 Windkrachten op een gebouw
 a. Winddruk F_d en windzuiging F_z
 Beide krachten zijn evenredig met de grootte van het getroffen wandoppervlak
 b. bovenaanzicht
 c. zijaanzicht
 d. vooraanzicht

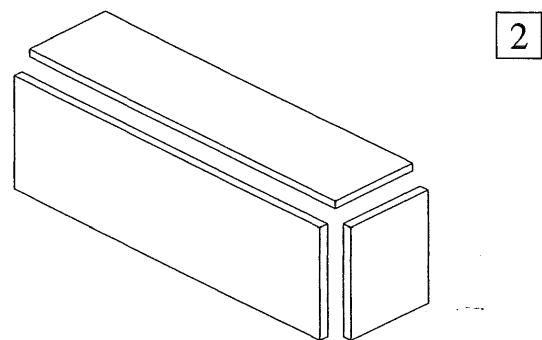


Fig. 2 Vlakke constructie-onderdelen afzonderlijk beschouwd (dak + wanden)

4.5.1 ALGEMEEN

Gebouwen worden samengesteld uit vele onderdelen. Soms worden deze 'koud' tegen elkaar gezet (zonder enig verbindingsmiddel).

We kunnen er ook een drukverdelende laag tussen plaatsen, die er voor zorgt dat de krachten goed worden overgedragen. Als dit een laagje metselspecie is, dan zal in het algemeen door zo'n voeg een zekere trekkracht kunnen worden overgebracht.

Het is echter ook mogelijk dat beide onderdelen door de verharde specielaag weliswaar uitstekend passen, maar in feite los op elkaar liggen. De voorschriften gaan in de meeste gevallen van dit laatste standpunt uit.

Bij in het werk gestort beton is het vrij eenvoudig om de verschillende onderdelen tot één geheel te verbinden door middel van de wapening.

Bij van te voren vervaardigde onderdelen (geprefabriceerd beton) kunnen aparte bevestigingsmiddelen worden aangebracht.

Bij staal is het gemakkelijk om afzonderlijk aangevoerde onderdelen alsnog aan elkaar te lassen of te bevestigen met (voerspan)bouten.

Bij verschil in bouw materiaal kan de aansluiting meer zorgen baren. Soms worden onderdelen opzettelijk los van elkaar gehouden om scheurvorming door temperatuurverschillen of krimp te voorkomen.

In detail worden de mogelijkheden bij de aansluiting van onderdelen besproken bij het vak DRAAGCONSTRUCTIES.

De aansluiting van een onderdeel aan andere onderdelen is een bij uitstek geschikte plaats om het betreffende onderdeel voor de berekening van de overige delen te isoleren. De aansluitingen van dat deel met de rest van de constructie worden dan als de *opleggings* van dat onderdeel beschouwd.

Fig. 3 Stalen brug in bovenaanzicht, vóór en na temperatuurverhoging

4.5.2 STALEN BRUGGEN

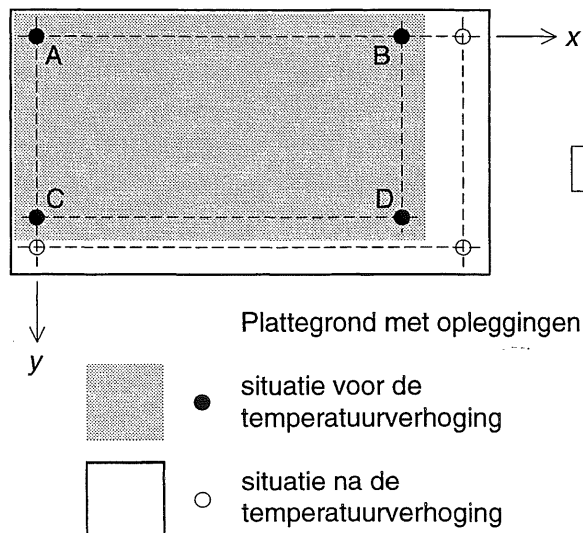
Stalen bruggen worden meestal nabij de vier hoekpunten van de plattegrond ondersteund. Deze punten rusten dan op pijlers of landhoofden (i.h.a. van gewapend beton).

Staal geleidt de warmte gemakkelijk en heeft een grote uitzettingscoëfficiënt. Door zonbestraling kan de temperatuur van een brug sterk stijgen waardoor de brug in zijn geheel uitzet. Men kan zich als het ware voorstellen dat men de brug door een (zeer zwak vergrotend) vergrootglas bekijkt. Bij een vaste verbinding van de brug met de opleggings kunnen door temperatuurvariaties grote krachten in de landhoofden ontstaan, waardoor zowel de brug als de landhoofden schade kunnen oplopen.

Daarom heeft men opleggings ontworpen die een stabiele ondersteuning waarborgen maar de uitzetting van de brug niet verhinderen.

In fig. 3 is een brede brug in bovenaanzicht weergegeven. Punt A wordt zodanig vastgezet dat het zich in x - en y -richting niet kan verplaatsen. Als we dan de (sterk overdreven getekende) vorm van de verwarmde brug beschouwen, behoeft punt B zich alleen in x -richting te kunnen verplaatsen, punt C alleen in y -richting en punt D moet zich zowel in x - als in y -richting kunnen verplaatsen.

De voorheen genoemde voorwaarden kunnen worden verwerkt door in punt A een puntvormig scharnier aan te brengen, in punt B een rol die zich alleen in x -richting kan verplaatsen en in punt C een rol die zich alleen in y -richting kan verplaatsen. In punt D tenslotte een rol die zich in elke horizontale richting kan verplaatsen.



4.5.3 IDEALE OPLEGGINGEN RUIMTELIJK

We onderscheiden een drietal 'ideale' opleggingen:

1. een roloplegging
2. een scharnier
3. een volledige inklemming

Deze opleggingen moeten nader worden gedefinieerd omdat zowel voor de ruimte als het platte vlak dezelfde benamingen worden gebruikt.

We zullen eerst het ruimtelijke geval beschouwen en achtereenvolgens aangeven welke verplaatsingen en hoekverdraaiingen de ondersteuning toelaten. Vervolgens zullen we aangeven welke krachten en momenten de ondersteuning kunnen overbrengen.

Het systeem is heel eenvoudig:

geen verplaatsing: → wel een kracht

wel een verplaatsing: → geen kracht

geen rotatie: → wel een moment

wel een rotatie: → geen moment

Voor een bol, een puntscharnier en een volledige inklemming is een en ander hiernaast weergegeven.

Uit het voorgaande blijkt:

- Bij alle ondersteuning wordt aangenomen dat er geen zakking optreedt.
- Een 'bol'oplegging kan uitsluitend een verticale kracht overbrengen.
- Een 'punt'scharnier kan een willekeurig gerichte kracht overbrengen waarvan de werklijn door het scharnier gaat.
- Een volledige inklemming kan zowel een willekeurig gerichte kracht als een willekeurig koppel overbrengen.

Overzicht ideale opleggingen ruimtelijk

1. Rol (bolvormig)

Verplaatsingen		Krachten
u_x	+	$F_x = 0$
u_y	+	$F_y = 0$
u_z	= 0	F_z +

Rotaties		Momenten
ϕ_x	+	$M_x = 0$
ϕ_y	+	$M_y = 0$
ϕ_z	+	$M_z = 0$

De notatie ϕ_x betekent een rotatie òm de x-as

2. Puntscharnier

Verplaatsingen		Krachten
u_x	= 0	F_x +
u_y	= 0	F_y +
u_z	= 0	F_z +

Rotaties		Momenten
ϕ_x	+	$M_x = 0$
ϕ_y	+	$M_y = 0$
ϕ_z	+	$M_z = 0$

3. Volledige inklemming

Verplaatsingen		Krachten
u_x	= 0	F_x +
u_y	= 0	F_y +
u_z	= 0	F_z +

Rotaties		Momenten
ϕ_x	= 0	M_x +
ϕ_y	= 0	M_y +
ϕ_z	= 0	M_z +

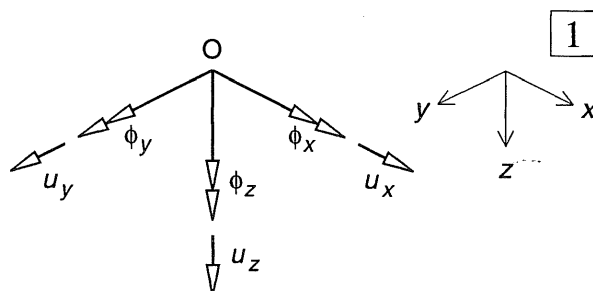


Fig. 1 Assenkruis met richtingen van verplaatsingen en rotaties (zie ook [035])

4.5.4 IDEALE OPLEGGINGEN IN HET PLATTE VLAK

Ook in het platte vlak spreken we van een rol, een scharnier en een volledige inklemming. Hierbij wordt stilzwijgend aangenomen dat geen enkel constructiedeel zich uit dit (meestal verticale) vlak kan verplaatsen.

Dit houdt dan in dat de rol geen boloplegging is volgens fig. [090-1e], maar een cilindervormige rol met de beschrijvende loodrecht op het vlak van tekening, zie fig. 2a en fig. [090-1a].

Evenzo is het scharnier geen puntvormig scharnier, maar een lijnscharnier waarbij de lijnrichting loodrecht op het beschouwde vlak staat, zie fig. 2b en fig. [090-1c].

In fig. 2 zijn links de ideale opleggingen gestyleerd weergegeven, zoals ze het uiteinde van een balk ondersteunen; rechts zijn de opleggingen als symbool weergegeven.

Bij een roloplegging kunnen alleen reactiekrachten worden overgebracht waarvan de werklijn gaat door de aanrakingpunten met de constructie en het oplegvlak, zie de figuren 2a en 3a. De kracht werkt meestal verticaal.

Bij een scharnier kan een willekeurig gerichte kracht worden overgebracht waarvan de werklijn door het scharnier moet gaan, zie fig. 2b. Het is gebruikelijk deze reactiekracht te ontbinden in zijn componenten R_V en R_H .

Een scharnier levert dus twee onbekenden.

Zowel bij de rol als bij het scharnier zal er in de berekeningen steeds vanuit worden gegaan dat deze opleggingen zowel trek- als drukkrachten kunnen overbrengen. Controleer in een praktijkgeval de juistheid van deze aanname!

Een rol kan men ook vervangen door een pendelstijl, zie fig. 3b. Dit is een staaf die aan beide einden scharnierend is bevestigd. Zo'n staaf kan dus uitsluitend krachten overdragen die door beide scharnieren gaan, zodat de werklijn van de reactiekracht langs de staafas moet vallen.

Pendelstijlen kunnen in elke willekeurige richting worden aangebracht. Omdat de werklijn van de reactiekracht bekend is, kan een pendelstijl maar één onbekende leveren. Eigenlijk kunnen we een pendelstaaf als een grote rol beschouwen waarvan alle overbodige delen zijn verwijderd, zie fig. 3b3.

Een volledige inklemming kan een kracht in een willekeurige richting leveren plus een koppel waarvan de draaiingsas loodrecht op het vlak van tekening staat. Een volledige inklemming levert dus drie onbekenden, zie fig. 2c en fig. [090-1d].

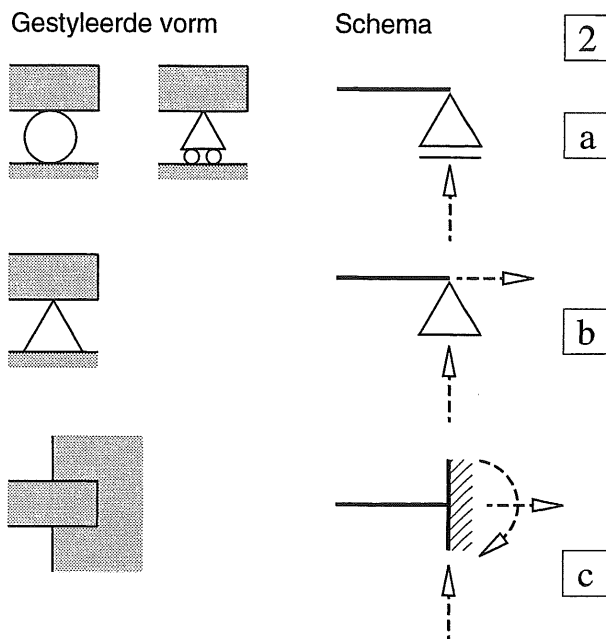


Fig. 2 Ideale opleggingen in het platte vlak
links: gestyleerd weergegeven opleggingen
rechts: aanduiding in de rekenschema's
(met leverbare reactiekrachten)

- a. Roloplegging
- b. Scharnier
- c. Volledige inklemming

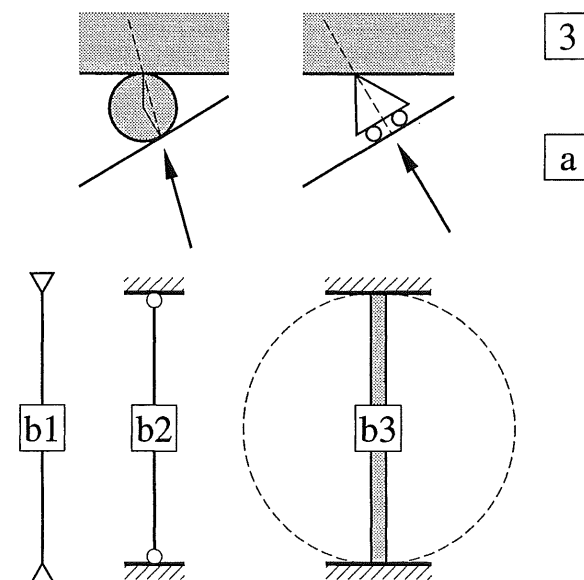


Fig. 3 Rolopleggingen
a. Richting reactiekracht bij een hellend ondersteuningsvlak
b. Pendelstijlen
b1 Schema volgens fig. 2b
b2 Meer gebruikelijke schematisering
b3 Beschouwing als een 'afgeslankte' rol

4.5.5 VOORBEELDEN OPLEGGINGEN

Rolopleggingen kan men beschouwen als losse bollen. Meestal zullen echter neopreen-opleggingen worden toegepast ; een pakket van stalen en rubberen plaatjes dat gemakkelijk horizontale verplaatsingen toelaat, maar daarbij nauwelijks wordt ingedrukt, zie fig. 1e.

Cylindervormige ondersteuning leveren in hun rolrichting vrijwel geen weerstand (rollende wrijving), maar langs een beschrijvende van de cylinder kunnen weer grote wrijvingskrachten worden overgebracht, die beweging in die richting verhinderen, zie fig. 1a.

Bij een puntscharnier kan men denken aan een ouderwets haakje waarmee een raam kan worden vastgezet. Het haakje wordt in één punt vastgehouden, maar kan in alle richtingen roteren. Bij ruimtevakwerken kan de aansluiting van een aantal staven eveneens worden beschouwd als een puntscharnier, zie fig. 1b.

Een lijnscharnier daarentegen laat maar een rotatie in één richting toe, zie fig. 1c. Een aansprekend voorbeeld van een (verticaal) lijnscharnier is een deur, zie fig. 1f. In geopende toestand kunnen we de deur zonder enige moeite verder openen of sluiten: het scharnier kan geen moment overbrengen. In elke geopende stand kunnen we trek- of drukkrachten op de deur uitoefenen, die door het scharnier gaan. Maar we kunnen ook aan de deur gaan hangen: evenwijdig aan de draaiingsas van de deur kunnen wel degelijk momenten worden overgebracht door het lijnscharnier.

Bij een volledige inklemming kan men denken aan een boom die met zijn wortelstelsel vast verankerd is in de grond, zie fig. 2. Een andere (min of meer volledige) inklemming is weergegeven in fig. 1d; een betonnen blok in de grond waarop een stijl met moeren is vastgezet.

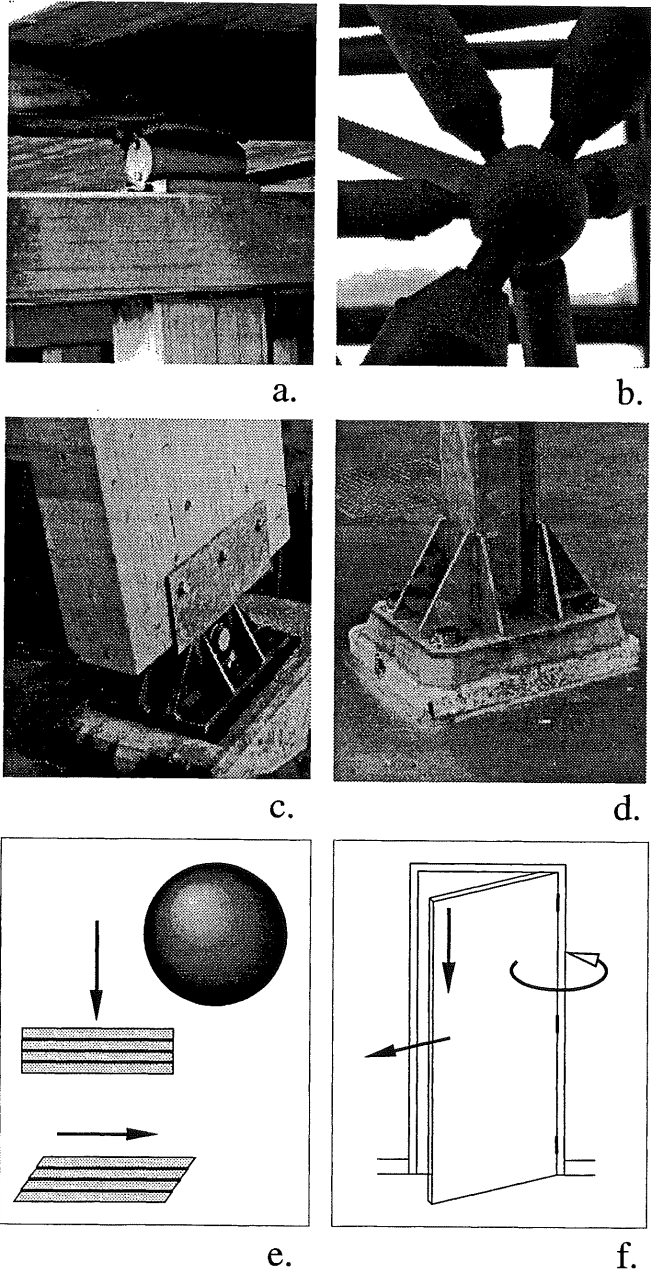


Fig. 1 Opleggingen

- a. Roloplegging in het vlak van tekening (viaduct)
- b. Scharnier bij een ruimtevakwerk
- c. Lijnscharnier bij een houten spant
- d. 'Volledige' inklemming bij een stalen stijl
- e. Bol (=rol)-oplegging en neopreen oplegging
- f. Lijnscharnier bij een deur

Getrokken pijlen: Krachten kunnen *wel* worden overgedragen; er treedt geen verplaatsing op
 Gestippelde pijlen: Krachten kunnen *niet* worden overgedragen; er treedt *wel* verplaatsing op



Fig. 2 Volledige inklemming bij een boom

4.5.6 INVOEREN VAN IDEALE RANDVOORWAARDEN

Bij een gegeven probleem hebben we maar zelden te maken met de in [088 en 089] beschreven ideale randvoorwaarden. Bij een plank over een sloot hebben we zeker niet te maken met een rol of een scharnier en bij een houten balk die is ingemetseld in een muur, zullen we zien dat we daar evenmin van een volledige inklemming mogen spreken.

Het blijkt echter dat dikwijls een eenvoudige en eenduidige oplossing van het probleem kan worden verkregen door een geschikt gekozen combinatie van ideale opleggingen. De kunst van het schematiseren van de opleggingen bestaat dan hierin, dat de uitkomsten van de berekening toch zo goed mogelijk dienen overeen te komen met de resultaten die behoren bij de werkelijke opleggingen. Een en ander zal worden gedemonstreerd aan het eenvoudige voorbeeld van een ladder die tegen een wand wordt geplaatst en door een persoon wordt bestegen, zie fig. 3.

We gaan uit van het normale geval waarbij de zijdelingse stabiliteit van de ladder voldoende is. We kunnen de ladder dan op het verticale vlak projecteren en verder behandelen als een lijnvormig constructie-element, waarvan de breedte verder niet hoeft te worden beschouwd.

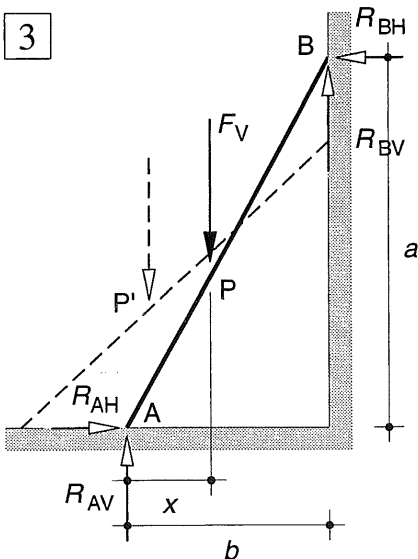
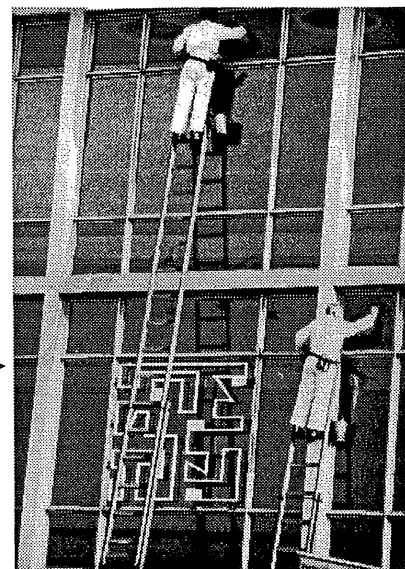


Fig. 3
Schema van een persoon op een ladder in de oorspronkelijke en in de weggeschoven stand

Fig. 4
Glazenwassers bij station CS te Rotterdam



Schematisering

We schematiseren de ladder als een dikke streep A-B en geven de persoon aan als een puntlast F_V , zie fig. 3. De positie van de persoon op de ladder wordt vastgelegd door de afstand x tussen punt A en de werklijn van F_V . Het gewicht van de ladder wordt verwaarloosd ten opzichte van het gewicht van de persoon. De ladder is gewoon neergezet en heeft in punt A contact met de vloer en in punt B contact met de wand.

De grootte en de richting van de reactiekrachten is nog onbekend, maar ze zullen in ieder geval resp. door de punten A en B moeten gaan. Voor de berekening worden deze reactiekrachten ontbonden gedacht in hun verticale en horizontale componenten, zie fig. 3.

In punt A treedt een voorsnag onbekende reactiekracht R_{AV} op. Voor de hierbij maximaal mogelijke horizontale wrijvingskracht R_{AH} geldt:

$$R_{AH} < \mu R_{AV} \quad (1)$$

In punt B rust de ladder tegen de wand, er zal dus in ieder geval een horizontale reactiekracht R_{BH} aanwezig moeten zijn. Voor de daarbij behorende verticale wrijvingskracht R_{BV} geldt dan:

$$R_{BV} < \mu R_{BH} \quad (2)$$

Als de ladder gaat schuiven dan verplaatst het aangrijpingspunt P van de kracht F_V zich omlaag, hierdoor beweegt punt A naar links en punt B naar beneden, zoals in fig. 3 met een stippellijn is aangegeven. De wrijvingskrachten zullen dus tegengesteld aan deze richtingen werken. We hebben nu vier onbekende reactiekrachten geïntroduceerd, terwijl er maar drie evenwichtsvergelijkingen ter beschikking staan. Het probleem is dus niet eenduidig op te lossen. We zullen nagaan hoe ver we kunnen komen met het toepassen van de evenwichtsvoorwaarden.

4.5.7 STATISCH ONBEPAALENDE OPLEGGING

In fig. 1 is een herhaling gegeven van het schema van de ladder. In de beide uiteinden grijpen de onbekende oplegreacties R_A en R_B aan, waarvan de orthogonale componenten in de figuur zijn weergegeven. We passen nu achtereenvolgens de drie evenwichtsvoorwaarden toe (met een assenkruis volgens [088-1]).

Evenwichtsvoorwaarden:

Verticaal evenwicht: $\sum F_z = 0$:

$$-R_{AV} + F_V - R_{BV} = 0$$

$$R_{AV} + R_{BV} = F_V \quad (3)$$

Horizontaal evenwicht: $\sum F_x = 0$

$$+R_{AH} - R_{BH} = 0$$

$$R_{AH} = R_{BH} \quad (4)$$

Statisch moment om punt A: $\sum K_A = 0$

$$+F_V x - R_{BH} a - R_{BV} b = 0$$

$$R_{BH} a + R_{BV} b = F_V x \quad (5)$$

We kunnen dus geen enkele reactiekracht rechtstreeks in F_V uitdrukken. Het statisch moment opmaken om een ander punt helpt ons niet, omdat dit geen onafhankelijke vergelijking levert. We kunnen alleen enkele extreme mogelijkheden onderzoeken door één reactiekracht als bekend aan te nemen.

Als eerste mogelijkheid veronderstellen we dat de *verticale wrijvingskracht* R_{BV} gelijk is aan nul. Uit de vergelijkingen (3) t/m (5) volgt dan:

$$R_{AV} = F_V \quad R_{BV} = 0$$

$$R_{AH} = R_{BH} = \frac{x}{a} F_V$$

Bij glazenwassersladders is aan de bovenwijze een wielje aangebracht om de ladder gemakkelijk langs de gevel omhoog te kunnen schuiven. In dit geval is dus precies aan de bovengenoemde voorwaarde voldaan.

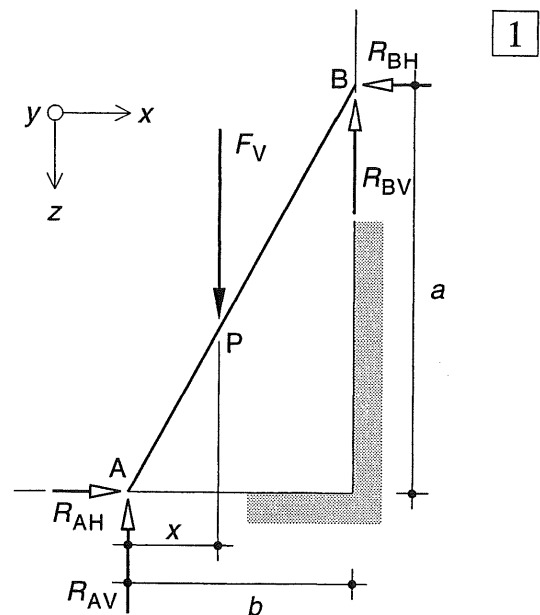


Fig. 1 Schema van een persoon op een ladder

Als tweede mogelijkheid veronderstellen we, dat de *horizontale wrijvingskracht* R_{AH} gelijk is aan nul. Dan volgt uit de formules (3) t/m (5):

$$R_{AV} = \frac{b-x}{b} F_V \quad R_{BV} = \frac{x}{b} F_V$$

$$R_{AH} = R_{BH} = 0$$

Dit blijkt een onmogelijke oplossing te zijn. Als er geen drukkracht R_{BH} aanwezig is, kan er ook geen wrijvingskracht R_{BV} worden geleverd. De ladder schuift dan zonder meer weg. De wrijvingskracht R_{AH} is dus essentieel voor het evenwicht.

Uiteraard kunnen we klakkeloos aan het ene uiteinde van de ladder een scharnier invoeren en aan de andere zijde een rol. De oplegreacties zijn dan eenduidig bepaald. Maar dan zijn we nog steeds niet zeker, dat deze oplossing redelijk overeenkomt met de werkelijkheid. Er is dan ook een grote kans dat de ladder alsnog met de persoon erop wegglijdt, terwijl de berekening juist is bedoeld om dit soort calamiteiten te voorkómen.

4.5.8 GRAFISCHE OPLOSSING

Het blijkt dat men grafisch veel sneller tot een aannemelijke oplossing kan komen.

Hierbij dient men het volgende te bedenken.

De kracht F_V zal evenwicht moeten maken met de reactiekrachten R_A en R_B . Dit houdt in, dat de werklijnen van de drie krachten elkaar in één punt S moeten snijden, zie fig. 2a. De werklijnen van R_A en R_B worden bepaald door de hoeken α_1 en α_2 , waarvoor geldt:

$\text{tg } \alpha_1 = R_{AH} / R_{AV}$ en $\text{tg } \alpha_2 = R_{BV} / R_{BH}$. De verhouding tussen elk tweetal componenten kan nooit groter zijn dan de wrijvingscoëfficiënt $\mu = F_t / F_n$, zodat ook geldt $\text{tg } \alpha_{\max} = \mu$.

Aangezien ook de richtingen van de wrijvingskrachten vastliggen (zie fig. 1) kan men uitgaande van punt A een zone vastleggen, waarbinnen de werklijn van R_A moet liggen; het horizontaal gearceerde gebied in fig. 2b. Evenzo kan men uitgaande van punt B een zone vastleggen waarbinnen de werklijn van R_B moet liggen; het verticaal gearceerde gebied in fig. 2b. Het snijpunt S van R_A , R_B en F_V , moet dus liggen in het gebiedje met het kruisraster. Voor de getekende ligging van F_V kan dit alleen maar gebeuren in het deel C-D van de werklijn van F_V . Uit de bijbehorende krachtendriehoek volgt dan de grootte van de reactiekrachten.

In de figuur zijn de uiterste waarden weergegeven die elkaar maar weinig blijken te ontlopen (werklijn van R_B volgens BC en BD). Eén ervan is de als eerste besproken analytische oplossing met een roloplegging in punt B (snijpunt van de drie werklijnen in punt D).

In het normale geval – waarbij een wrijvingscoëfficiënt $\mu = 0,4$ is aangenomen – kan de ladder niet hoger worden bestegen dan punt Q. Hierboven is geen evenwicht meer mogelijk en schuift de ladder weg.

Dit is te voorkomen door de ladder wat steiler neer te zetten, waardoor $b/a < \mu$.

Bij toepassing van ideale randvoorwaarden zal men dus in één ondersteuning een scharnier moeten aannemen (2 onbekenden) en in de andere ondersteuning een rol (1 onbekende). Met behulp van de drie evenwichtsvergelijkingen volgt dan een eenduidige oplossing.

De aanname met een scharnier in A en een rol in B [092] komt dus vrij dicht bij de werkelijke oplossing.

Nemen we het scharnier echter aan in B en de rol in A, dan zal men in B de ladder aan de wand moeten vastbinden, zoals bij een spiegelgladde vloer nodig is.

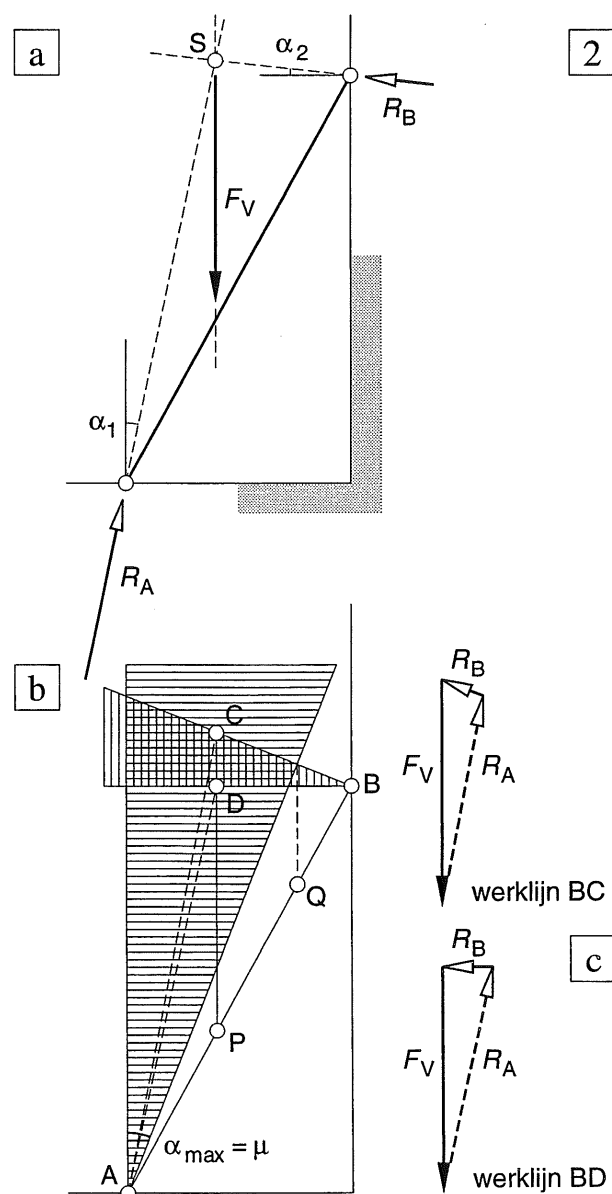


Fig. 2 Grafische oplossing

- Evenwicht van drie krachten
- Gebieden waarin de reactiekrachten R_A en R_B kunnen liggen
- Krachtendriehoeken voor de extreme gevallen

4.6.1 CONSTRUCTIE-MATERIALEN

In de bouw worden verschillende constructiematerialen toegepast die elk hun eigen specifieke eigenschappen bezitten; dit wordt uitvoerig beschreven bij MATERIAALKUNDE.

Voor de krachtwerving in de constructie is het belangrijk dat de toegepaste materialen de daarop aangrijpende krachten kunnen afdragen naar de ondergrond, zonder daarvan schade te onderkennen en zonder hinderlijk grote vervormingen te vertonen.

Het mechanisch gedrag van een materiaal kan worden bepaald met behulp van diverse proeven. Een van de belangrijkste is het uitvoeren van trekproeven (staal) of drukproeven (beton) op gestandaardiseerde proefstukken.

In fig. 1b is het principe van zo'n proef weergegeven. De stalen trekstaaf wordt centrisc belast en de trekkrachten F worden geleidelijk opgevoerd. Over de meetlengte l wordt de verlenging Δl met nauwkeurige meetapparatuur gemeten. Over een vrij groot belasting-traject blijkt de verlenging evenredig te zijn met de belasting, daarboven wordt de afwijking steeds groter.

Bij de verwerking van de meetresultaten wordt de spanning σ uitgezet ten opzichte van de relatieve lengteverandering ε . Hierbij geldt:

$$\sigma = F / A \quad (6)$$

$$\varepsilon = \Delta l / l \quad (7)$$

Dit diagram wordt het σ - ε -diagram genoemd (sigma-epsilon-diagram); het is karakteristiek voor het materiaal. Een toename van de relatieve lengteverandering wordt *rek* genoemd, een afname *stuik* (of negatieve rek).

In fig. 1a zijn de σ - ε -diagrammen voor een aantal bouwmaterialen weergegeven. De spanningen en rekken die hierbij optreden, blijken per materiaal sterk te verschillen. Meestal valt dit niet zo op, omdat deze diagrammen vrijwel altijd voor elk materiaal afzonderlijk worden weergegeven. Hierbij worden dan geheel verschillende schalen gebruikt, zodanig dat alle tekeningen ongeveer even groot zijn.

Uit figuur 1a blijkt het volgende:

Bij niet te grote belastingen is het verband tussen spanning en rek vrijwel lineair.

De helling van deze lijn is gelijk aan:

$$\text{tg } \alpha = \sigma / \varepsilon$$

Deze verhouding wordt de *elasticiteitsmodulus* E genoemd. De formule wordt dan ook meestal geschreven als:

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (8)$$

Bij hogere belastingen nemen bij sommige materialen de rekken sterk toe bij vrijwel constant blijvende spanning. Men spreekt dan van een *plastisch* materiaalgedrag (staal). Bezwijken kan echter ook abrupt optreden (glas), men spreekt dan van een *bros* materiaal. Verder blijken steenachtige materialen veel beter druk op te kunnen nemen dan trek. Let op, trekspanningen zijn in fig. 1a naar beneden uitgezet!

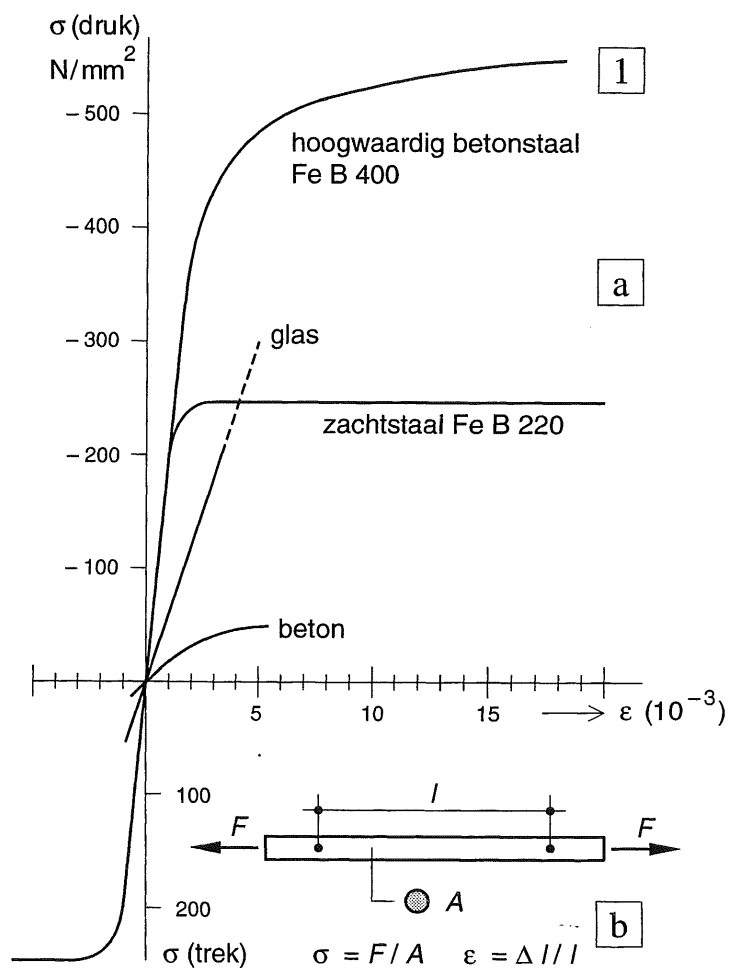


Fig. 1 Materiaalgedrag

a. σ - ε -diagrammen voor enkele materialen

b. Principe van een trekproef

4.6.2 IDEEAAL MATERIAAL

In de elementaire toegepaste mechanica is het gebruikelijk om niet uit te gaan van de werkelijke eigenschappen van het betreffende constructiemateriaal, maar dit te vervangen door een zgn. 'ideaal' materiaal dat geacht wordt de volgende eigenschappen te bezitten:

- 1 homogeen
- 2 isotroop
- 3 lineair elastisch

Betekenis van de termen:

Homogeen; het materiaal heeft overal dezelfde samenstelling.

Isotrop; het materiaal bezit in alle richtingen dezelfde eigenschappen.

Lineair elastisch;
de vervormingen zijn recht evenredig met de belasting en onafhankelijk van de tijd.

Het onderdeel van de toegepaste mechanica dat op deze veronderstellingen is gebaseerd wordt aangeduid als:

lineaire elasticiteitstheorie.

Deze theorie wordt in de praktijk nog steeds veel toegepast. Voorlopig zullen we ons alleen hiermee bezighouden.

Bij de berekeningen wordt dan van een lineair σ - ε -diagram uitgegaan, zoals dat in fig. 1a is weergegeven voor glas. We moeten dan wel afspreken tot welke spanning we dit verband mogen gebruiken. Bij brosse materialen kan een groot verschil tussen druk en trek optreden; voor staal maakt het geen verschil.

Van de gebruikelijke bouwmaterialen komt staal aardig in de buurt van de genoemde ideale eigenschappen, zolang de spanningen in het materiaal niet te groot worden. Beton en hout voldoen er maar matig aan en ook hier moeten de spanningen vooral niet te groot worden.

In de voorschriften wordt geëist dat van constructies de bezwijkbelasting wordt bepaald en tegen die tijd kan voor geen enkel constructie-materiaal nog worden gerekend op een lineair elastisch gedrag. Bij de berekening van de bezwijktoestand kan echter met voordeel gebruik worden gemaakt van een plastisch materiaalgedrag [KW-8].

4.6.3 WET VAN HOOKE

De gehele lineaire elasticiteitstheorie berust op de aanname dat spanningen en vervormingen recht evenredig met elkaar zijn; de zogeheten 'Wet van Hooke'.

Toch heeft het indertijd vrij lang geduurd voordat men kans zag de relatie tussen krachten en vervormingen in de onderstaande eenvoudige vorm te brengen.

$$\sigma = E \varepsilon \quad (8)$$

Om de lengteverandering Δl van de staaf te bepalen, kunnen we in vergelijking (8) de waarden van σ en van ε substitueren, die volgen uit de vergelijkingen (6) en (7). We vinden dan:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

en hiervoor kunnen we weer schrijven:

$$\Delta l = \frac{F l}{E A} \quad (9)$$

De resultaten zijn gemakkelijk te onthouden:

- De verlenging is *recht* evenredig met de uitgeoefende kracht en de lengte van de staaf.
- De verlenging is *omgekeerd* evenredig met de doorsnede van de staaf en de grootte van de elasticiteitsmodulus.

De factor EA wordt aangeduid als *rekstijfheid*.

Contractiecoëfficiënt

Het trekstaafje wordt niet alleen langer, maar ook wat smaller, zie fig. [096-1b]. De verhouding tussen de rek in de richting van de kracht en de stuik in een richting loodrecht daarop blijkt constant te zijn.

$$\nu = - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (10)$$

Deze verhouding noemen we *contractiecoëfficiënt* ν (nu) (ook aangeduid als Poissonverhouding). In de elementaire mechanica wordt meestal gesteld: $\nu = 0$.

De maximaal mogelijke waarde bedraagt: $\nu = 0,5$.

Men spreekt dan van een onsamendrukbaar materiaal (wat er in de lengte bijkomt gaat er in de breedte weer af).

4.6.4 VERVORMINGEN PROEFSTAAF

In fig. 1a zijn de vervormingen van een stukje *trekstaaf* in sterk overdreven vorm weergegeven. Het is onder invloed van de trekkrachten F iets langer geworden maar ook wat smaller.

Dit vervormingsbeeld komt in feite sterk overeen met de uitwendige vorm van een veer die op trek wordt belast, zie fig. 1b. Ook hier veroorzaakt een trekkracht een verlenging van de veer, maar tegelijkertijd ook een versmalling, omdat de lengte van de staaldraad onveranderd blijft. Evenals bij de veer is de verlenging Δl van de proefstaaf evenredig met de kracht F , zie formule [056-(26)]; de staaf kan in feite als een stijve veer worden beschouwd.

In fig. 2 is formule (9) gevisualiseerd met behulp van een aantal veermodellen. Uit fig. 2a, b, c blijkt dat de verlenging Δl recht evenredig is met de kracht op de veer.

Hangen we twee veren onder elkaar dan is de verlenging ten gevolge van de kracht F uiteraard $2 \Delta l$, zie fig. 2d.

Zetten we twee veren naast elkaar en verdelen we de kracht F gelijk over beide veren dan is de verlenging gelijk aan $\Delta l / 2$, zie fig. 2e.

De verlenging is echter ook nog afhankelijk van het materiaal van de proefstaaf (dit is dan te vergelijken met de stijfheid van de veer waarmee we het proefje uitvoeren). Dit wordt tot uitdrukking gebracht in de waarde van de elasticiteits-modulus E . Hoe groter de E , des te stijver het materiaal en des te kleiner de verlenging.

TABEL 5

Elasticiteitsmodulus E (in N/mm^2) en Contractie-coëfficiënt ν

	E	ν
hout	10 000	-
metselwerk	3 500 – 35 000	0,10 – 0,20
beton	10 000 – 30 000	0,18
graniet	40 000 – 75 000	0,20 – 0,26
basalt	60 000 – 105 000	0,31
glas	70 000	0,20
aluminium	72 000	0,33
staal	210 000	0,30
perspex	3 000	0,40
rubber	1,5 – 10	0,50

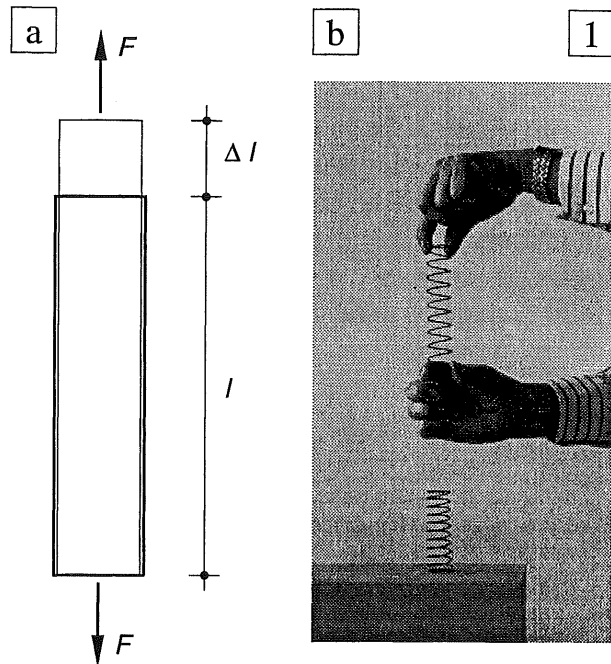


Fig. 1 Vervorming van een proefstaaf
a. Vervormingen van een getrokken proefstaaf
b. Vervormingen van een getrokken veer
Het proefstaafje reageert als een stijve veer, maar de echte veer reageert als een slappe veer.

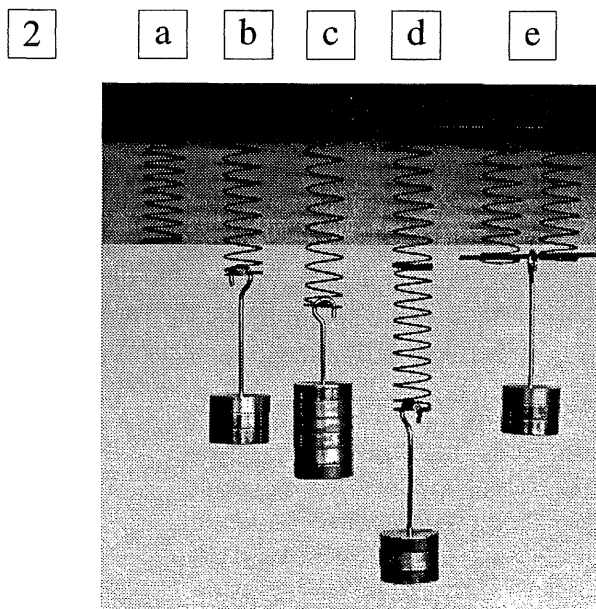


Fig. 2 Veermodellen voor de vervormingen
a. Onbelast: lengte l ; 'doorsnede' A
b. Een kracht F veroorzaakt een verlenging Δl
c. Een kracht $2 F$ veroorzaakt een verlenging $2 \Delta l$
d. Een kracht F op een lengte $2 l$ veroorzaakt een verlenging $2 \Delta l$
e. Een kracht F op een 'doorsnede' $2 A$ veroorzaakt een verlenging $1/2 * \Delta l$

4.6.5 UITZETTINGS-COËFFICIËNT

Vrijwel alle bouwmaterialen zetten uit bij verwarming en krimpen bij afkoeling.

De lineaire uitzettingscoëfficiënt α geeft de relatieve lengteverandering aan per $^{\circ}\text{C}$ temperatuurverschil. Bij een temperatuursverhoging Δt is de verlenging van een staafje met lengte l dus gelijk aan:

$$\Delta l = l * \alpha * \Delta t \quad (14)$$

Bij een volkomen gelijkmatige temperatuursverhoging treedt in elke richting rek op, en bij een temperatuursverlaging in elke richting stuit. Men kan zich als het ware voorstellen dat men het staafje onder een zwak vergrotend vergrootglas beschouwt.

In tabel 5 zijn de lineaire uitzettingscoëfficiënten gegeven voor een aantal materialen. Zo berust de goede werking van gewapend beton mede daarop, dat de uitzettingscoëfficiënten voor beton en staal gelijk zijn.

TABEL 5 Lineaire uitzettingscoëfficiënt α (10^{-6})

Hout	3 - 10
Staal	12
Aluminium	24
Glas	9
Beton	12
Plastics	50 - 70
Rubber	80

4.6.6 INVLOED TEMPERATUUR OP DE KRACHTSWERKING

Als constructie-elementen statisch bepaald zijn ondersteund, hebben de vervormingen en verplaatsingen van het constructie-element geen invloed op de krachtswerking.

Bij een statisch onbepaalde ondersteuning daartegen, waarmee we bij bouwconstructies al gauw te maken hebben, kunnen door temperatuurveranderingen zeer grote krachten ontstaan. Bij steenachtige materialen zal dit veelal scheurvorming tot gevolg hebben.

Voorbeeld

Een staalprofiel HE-A 200 heeft een lengte van 6,00 m en is los opgelegd op twee gemetselde muren, als een ligger op twee steunpunten.

De temperatuur stijgt 20°C

Gevraagd wordt de verlenging van de balk.

Lineaire uitzettingscoëfficiënt $\alpha = 12 * 10^{-6}$

Volgens formule (14) vinden we:

$$\Delta l = l * \alpha * \Delta t = 6000 * 12 * 10^{-6} * 20 = 1,44 \text{ mm}$$

We gaan nu na welke kracht nodig zou zijn, om deze verlenging te verhinderen. We bepalen dan de kracht die nodig is om de zojuist berekende verlenging Δl weer op te heffen. Hiertoe gebruiken we formule [095-(9)].

$$\Delta l = \frac{F l}{EA} \quad (9)$$

ofwel

$$F = EA * \Delta l / l \quad (9a)$$

Het profielenboek vermeldt als doorsnede van het profiel: $A = 5380 \text{ mm}^2$ en als massa per m^1 : 42,3 kg, dus $q = 423 \text{ N/m}^1$.

Elasticiteitsmodulus: $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

We vinden dan als benodigde kracht:

$$F = 210\,000 * 5380 * 1,44 / 6000 \\ = 271\,152 \text{ N} = 271 \text{ kN}$$

Deze kracht kunnen de gemetselde muren niet leveren. Als de balk los op de muren ligt, zonder verder enige belasting, dan is de oplegreactie op elke muur gelijk aan:

$$R = 0,5 q l = 1/2 * 423 * 6,00 = 1269 \text{ N} = 1,3 \text{ kN}$$

Bij een wrijvingscoëfficiënt $\mu = 0,5$ kan elke oplegging dus hoogstens een horizontale reactiekracht leveren van 0,65 kN, zodat in de balk eveneens een drukkracht ontstaat van 0,65 kN (en dus *niet* van $2 \times 0,65 \text{ kN!}$). Bij verwarming schuift de balk dan moeiteloos over de muur.

Is de balk echter vast verbonden aan de muren, dan zullen de bovineinden van beide muren over een afstandje van ca 1,5 mm ten opzichte van elkaar moeten verplaatsen. Een slappe muur zal dat zonder scheurvorming kunnen, een stijvere muur wellicht niet. De berekening hiervan valt nu nog buiten het kader van onze beschouwingen.

Om de kracht te bepalen die nodig is om een temperatuurverlenging weer ongedaan te maken, kan de verlenging volgens formule (14) ook rechtstreeks worden gelijkgesteld aan de verkorting volgens formule (9). Men vindt dan:

$$F = EA * \alpha * \Delta t \quad (15)$$

4.7.1 NORMAALKRACHT EN BUIGING

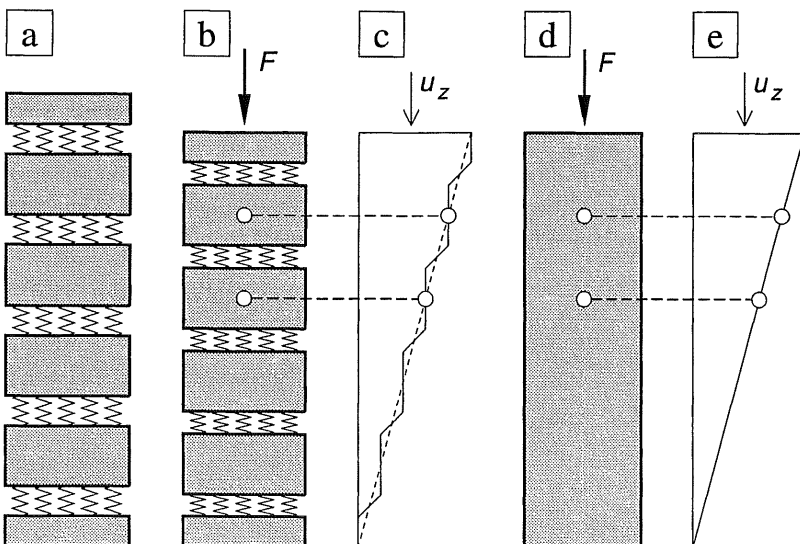
In KW-4 wordt uitvoerig ingegaan op de berekening van de spanningsverdeling in constructie-onderdelen.

Het is echter nuttig om alvast een globale indruk van deze spanningsverdeling te hebben, zoals die op kan treden bij staven en liggers ten gevolge van normaalkracht en buiging.

Normaalkracht

In 4.6.4 [096] is gewezen op de grote overeenkomst in het gedrag van een getrokken of gedrukte staaf en een getrokken of gedrukte veer. Bij de doorsnede-verdubbeling van de veren in fig. [096-2e] zijn we zo verstandig geweest om de kracht F gelijk over beide veren te verdelen. Als we nu drie veren naast elkaar plaatsen en alleen de middelste veer belasten, blijven de buitenste veren onbelast en vervormen dus niet, zie fig. 1a. Het staafje van fig. [096-1a] blijkt echter wél in staat te zijn om de kracht F gelijkmatig te spreiden over de gehele doorsnede. Om met een verenmodel belastingspreiding te bereiken, zullen we de veren dus onderling moeten koppelen, zie fig. 1b.

Fig. 1 Normaalkracht a Ongekoppelde veren
b. Belastingsspreiding door het koppelen van veren

*Verenmodel voor een staaf*

Om met een verenmodel voor *staven* en *liggers* verder te kunnen werken, concentreren we de vervormingen in een aantal zone's met veren, waartussen we blokvormige onderdelen aannemen die niet vervormen, zie fig. 2a. Twee opeenvolgende starre blokken verkeren dan in overeenkomstige omstandigheden als het verend ondersteunde blok van [059] en [060].

Als we het staafje van fig. 2a centrisch belasten dan zijn de vervormingen geheel geconcentreerd ter plaatse van de veren, zie fig. 2b.

De gemiddelde verplaatsing van de opvolgende blokken kan echter geheel in overeenstemming worden gebracht met de continue verplaatsing van de vergelijkbare onderdelen van het homogene staafje, vergelijk fig. 2c met fig. 2e.

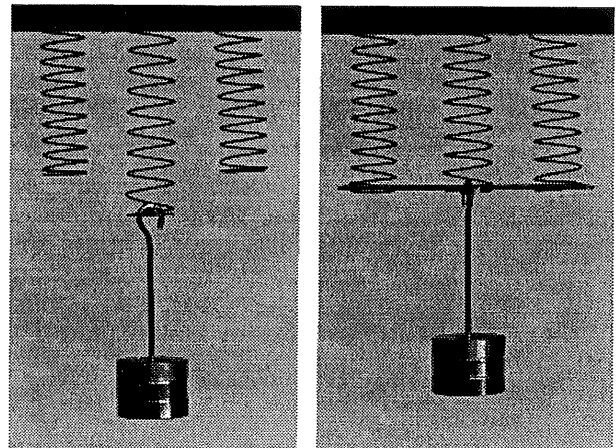


Fig. 2 Vervanging van een staafje van een ideaal materiaal door een gekoppeld verenmodel

- Onbelast verenmodel
- Verticale verplaatsingen ten gevolge van een centrische normaalkracht
- Verloop van de verticale verplaatsingen u_z ($3 \times$ zo groot uitgezet als in fig. 2b)
- Belast homogeen staafje
- Verloop van de verticale verplaatsingen u_z ($3 \times$ zo groot uitgezet, evenals in fig. 2c)

Buigend moment

Hetzelfde model kan ook uitstekend worden gebruikt om de vervormingen van een gebogen staaf of ligger te demonstreren, vergelijk de plank in fig. [072-1].

We beschouwen eerst weer één enkel verend ondersteund blok, dat door een koppel wordt belast, zie fig. 3. De middelste veer blijft onbelast, aan de linkerkant treedt trek op en aan de rechterkant druk.

We beperken ons hier verder tot een balk die aan elk uiteinde is onderworpen aan een koppel, zoals is getekend in fig. 4. De koppels zijn even groot en tegengesteld gericht.

In fig. 4a beschouwen we blok 1 nu verend opgelegd op blok 2. In [060-061] hebben we gezien dat de tegendruk van blok 2 op blok 1 dan lineair moet verlopen en hetzelfde geldt voor de verplaatsingen. De veer ter halverhoogte vervormt niet en neemt ook geen kracht op, zie fig. 3.

Uit het beginsel *actie = reactie* volgt dat blok 2 op precies dezelfde wijze wordt belast als blok 1 en dat geldt ook voor alle overige blokken. De gebogen vorm van een op buiging belaste ligger ten gevolge van de twee uitwendig aangrijpende koppels is dan ook zonder meer duidelijk.

De extreme spanningen aan de boven- en onderzijde van de ligger kunnen direct worden opgeschreven door gebruik te maken van de formules [061- (36)] en [061- (37)].

De tegendruk p_2 (uitgedrukt in kN/m^2) wordt dan vervangen door σ_{\max} (altijd uitgedrukt in N/mm^2). De lengte a van het blok moet bij de ligger worden vervangen door h (dit is dus de richting waarin de spanningen lineair variëren). De breedte b houdt dezelfde betekenis.

Voor een ligger met een rechthoekige doorsnede gaat formule [061-(37)] dan over in:

$$\sigma_{\max} = \frac{K}{W} = \frac{K}{\frac{1}{6}bh^2}$$

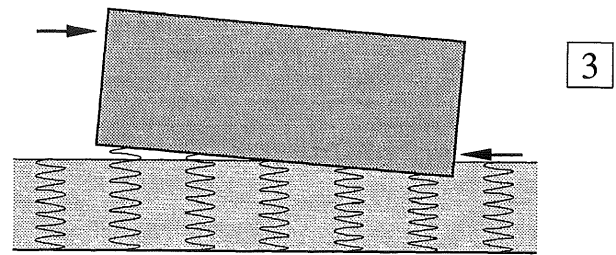


Fig. 3 Blok door veren ondersteund, onderworpen aan een koppel

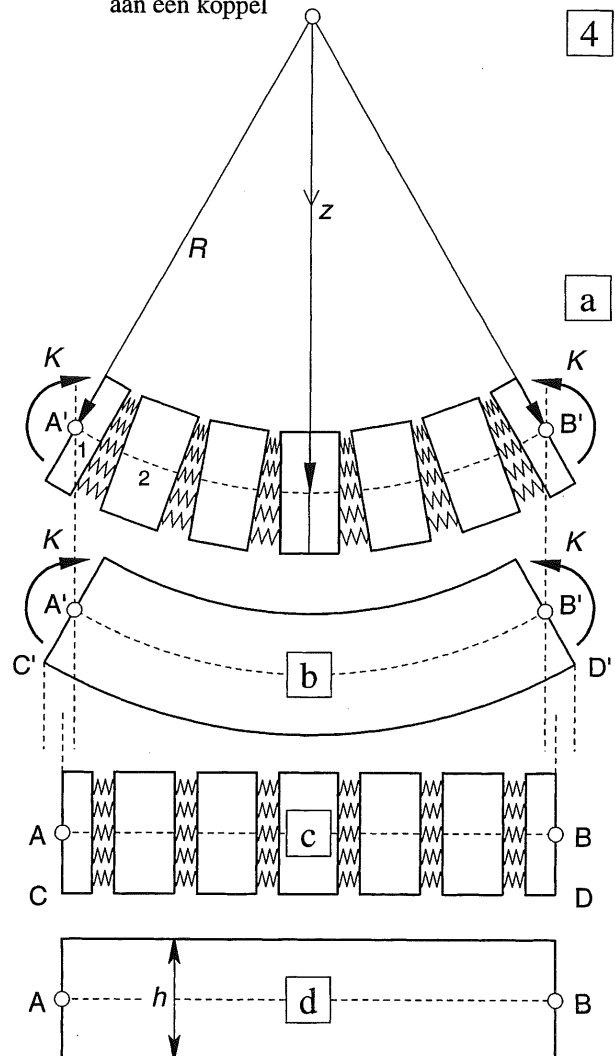
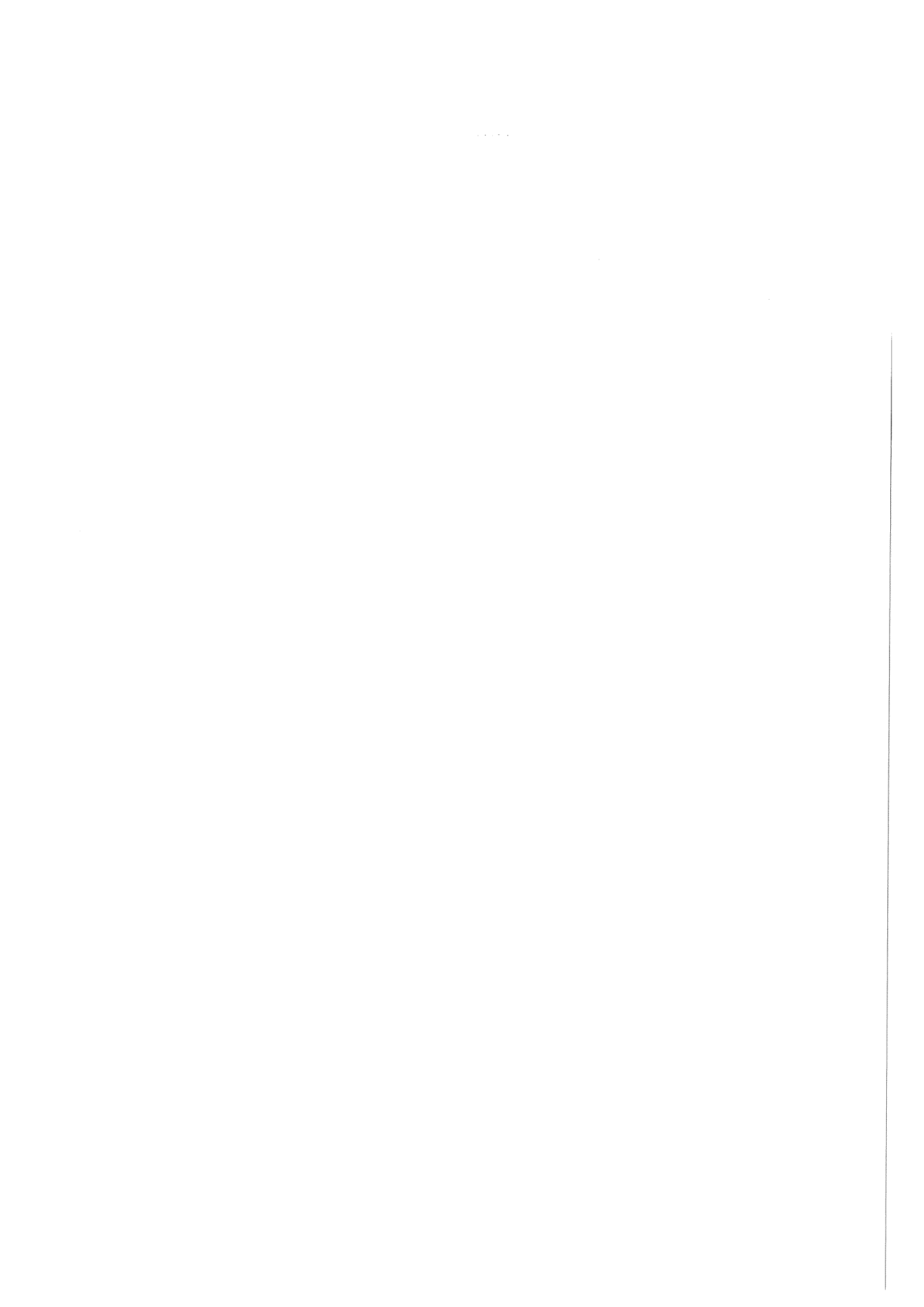


Fig. 4 Blokkenmodel gebruikt om de vervormingen bij buiging van een ligger aan te tonen

- Blokkenmodel onderworpen aan twee gelijke en tegengesteld gerichte koppels
- Idem voor een homogene ligger
- Blokkenmodel onbelast
- Homogene ligger onbelast

Bij grote vervormingen verplaatsen de punten A en B op de neutrale lijn zich naar binnen (A' en B')

De punten C en D verplaatsen zich ten opzichte van A en B weer naar buiten door de rotatie van de uiteinden



INLEIDING

De trefwoordenlijst van April 1999 heeft betrekking op de volgende delen:

- 0 BASISKENNIS
- 2 LIGGERS
- 3 VAKWERKEN , STANDZEKERHEID
- 4 SPANNINGEN
- 5 VERVORMINGEN

Deel 1 is in bewerking en (nog) niet verkrijgbaar in de bouwshop. Het omvat enkele elementaire mechanica-modellen, waarbij de hoofdkrachten-afdracht voornamelijk plaats vindt via normaalkrachten. Hierbij zijn twee hoofdbestanddelen te onderscheiden:

- 1 De grafische constructie met poolfiguur en stangenveelhoek, voor koorden, bogen, koepels en gewelven .
- 2 De Stapelsteen-mechanica voor metselwerk

De combinatie van 1 en 2 geeft een goed inzicht in de hoofdkrachtenwerking van historische gemetselde of gestapelde gebouwen zoals kathedralen of tempels uit de oudheid. Met behulp van 1 is eveneens inzicht te verkrijgen in enkele moderne constructievormen, zoals kabelconstructies.

In de andere dictaten wordt incidenteel verwezen naar deel 1. Studenten kunnen bij de leerstoel Krachtenwerking die onderdelen verkrijgen waarvan ze gebruik willen of moeten maken.

Hetzelfde geldt voor de onderstaande delen, waarvan de opzet momenteel wordt gewijzigd :

- 6 Portalen en Raamwerken
- 7 Spanningsleer

Zoals vermeld heeft de voorliggende trefwoordenlijst uitsluitend betrekking op de volgende delen: 0 - 2 - 3 - 4 - 5.

Ze wordt in principe aan alle nieuwe drukken van de dictaten toegevoegd en zonodig aangevuld en uitgebreid.

TOELICHTING TREFWOORDENLIJST

Het eerste cijfer van elke pagina waarnaar wordt verwezen geeft het betreffende deel aan.

In deel 5 liggen de pagina's dan tussen 500 en 599. Een cursieve nummering – bijv. 504 – heeft betrekking op het voorwerk aan het begin van deel 5, terwijl een notatie als A-504 betrekking heeft op de appendix aan het eind van dat deel.

Voor een goed overzicht zijn de bladzijde-nummers die op hetzelfde deel betrekking hebben, zoveel mogelijk onder elkaar geplaatst.

De hoofdtrefwoorden beginnen steeds met een hoofdletter en zijn alfabetisch geordend.

Bij diverse hoofdtrefwoorden is gebruik gemaakt van een onderverdeling, beginnend met een streepje en dan de omschrijving beginnend met een kleine letter in een kleiner lettertype, bijv.

Actie = Reactie

- voor uitwendige krachten
- voor inwendige krachten

Bij deze onderverdeling is meestal een systematische opbouw gebruikt en geen alfabetische. Kijk dus even wat er staat.

Bij sommige uitgebreide opsommingen is het hoofdtrefwoord weergegeven in hoofdletters, de primaire onderverdeling met 1, 2, 3 De secundaire onderverdeling wordt dan aangegeven met één streepje en de tertiäre met twee streepjes.

BEREKENING LIGGERS

- 1 Vrij opgelegde ligger
 - belasting één puntlast
 - belasting meer puntlasten
 - - idem grafisch

Als hetzelfde hoofdtrefwoord meer dan eens wordt genoemd, omdat er in de onderverdeling andere aspecten worden behandeld, dan wordt dat met Romeinse cijfers aangegeven

VERVORMINGEN I

.....

VERVORMINGEN II

.....

Actie = Reactie	031				
– voor uitwendige krachten	213				
– voor snedekrachten	221				
Assenkruis (rechtsdraaiend) 009					
– bij liggers	216	428			
<hr/>					
Basis-belastinggevallen	244				
BASIS-LIGGERS		508-511			
Diagrammen voor M, V, φ, w		512-519			
– Liggers op twee steunpunten, q -last		512-513			
– Eénzijdig ingeklemde liggers, resp. belast door K, F, q (vergeet-me-nietjes)		514-515			
– Liggers op twee steunpunten, belast door randmomenten		518-519			
Beddingsmodulus	056				
Belasting I					
– permanent (eigen gewicht) 074-075					
– veranderlijk (personen, meubilair, sneeuw)	076-077				
– wind	078-079				
– bijzondere belastingen	080				
– opgelegde vervormingen	082				
– invloed temperatuur	097				
Belasting II (nomenclatuur)					
– bezwijk- belasting = breukbelasting	071				
– rekenwaarde v.d. belasting	071				
– representatieve belasting = extreme belasting	076				
– momentane belasting = gemiddelde belasting	076				
Belasting-afdracht (systematiek) 213					
– afvoer windkrachten via stijve schijven	368-370				
– – voorbeeld analytisch	371				
– – voorbeeld numeriek	372				
– afvoer verticale en horizontale krachten	373				
Belasting op liggers					
– symmetrisch en keersymmetrisch	376-377				
Bollenmodel		405			
Buigend moment	218				
Buigspanning		426			
Buigsterkte (hout)		427			
Buigstijfheid		425			
<hr/>					
Centrische druk of trek		416			
[zie ook: SPANNINGSVERDELING]					
Cirkel van Mohr		441			
Constructiedelen:					
– blok- en lijnvormig, vlak	084-085				
Constructieve vormgeving					
– omschrijving vakgebied	017				
Contractie-coëfficiënt					
– definitie	095-096	414			
– numerieke waarden	096				
<hr/>					
Cremona (Vakwerken)	340				
– werkwijze algemeen	340-341				
– uitgewerkt voorbeeld	342-345				
<hr/>					
De St. Venant		486			
Deuvels		485			
Diagrammen snedekrachten ($V - M$)					
1 Liggers					
– belasting door puntlasten	228-235				
– – $N-V-M$ bij pendelstijlen	213				
– belasting door q -last	238-240				
– belasting lineair variërend	241				
– belasting: puntlasten + q -last	242-253				
Differentiaal-rekening					
– grondbeginselen	255				
– differentiëren	256-257				
Dimensies (omschrijving) 011					
Dimensioneren:					
– op normaalkracht (voorbeelden)	415				
– op buiging (voorbeeld)	427				
Doorbuiging liggers		509			
Doorgaande ligger		530-534			
[zie ook: LIGGER]					
– principe van de berekening	530-531				
– berekening bij een q -last	532-533				
– – gelijke overspanningen	534-535				
– – invloed randvelden	536-539				
– – afwisselend belaste velden	537				
– – vuistregel doorgaande ligger	539				
DOORSNEDE-GROOTHEDEN					
1 Analytische afleiding algemeen:					
– oppervlakte A	428				
– lineair oppervlakte-moment S	429				
– kwadratisch oppervlakte-moment I :					
– – berekening via integraalrekening	430-436				
– – berekening via het spanningsverloop	443-447				
– oppervlakte-product I	430				
– weerstandsmoment W	421; 427				
– zwaartepunt	429				
2 Gebruik van tabellen		442			
Driehoekige vakwerken		352			
DRIE-SCHARNIERSPANT	387		540		
– definitie	203				
– vergelijking met twee-scharnierspant	380				
– bepaling snedekrachten:					
– – N en V	388				
– – M bij een regel onder een helling	389				
– – M bij een verticale q -last	390-393				
– – – M bij een asymmetrische q -last	394-395				
– – M bij een horizontale puntlast	397				
– R en M bij willekeurige belastingen	398-399				
Druk; drukkracht	309	416-417			

Druklijn	396	468-471	Hoofdasen	425
– definitie		468	Horizontale belasting	
– toepassing bij driescharnierspanen	395-396		– op portalen	383
– toepassing bij kolommen		468-471	– op een driescharnierspant	397
Drukpunt		469		
Dubbele buiging		460-463	Incasseringsvermogen 081	
Dwarscontractie	095	414; 422	Ingeklemde ligger	209
Dwarscontractie-coëfficiënt =			Inklemming	356
= contractie-coëfficiënt	095	414	– verend	207 356-357
– numerieke waarden	096		– volledig	207-209 356-357
Dwarskracht	218		– invloed ligging oplegreacties	208
Dwarskrachtcentrum		498	Integraal-rekening:	
Dwarskrachtenlijn	228-235		– grondbeginselen	258-259
[zie ook: Diagrammen snedekrachten (Liggers)]			– bepaalde integraal	260
			– integreren	
Eenheden (omschrijving)	011		(analytisch en grafisch)	261
Eenzijdig ingeklemde ligger	207; 270	514	Inwendige hefboomsarm	420
Eigen gewicht	075			
Elasticiteitsmodulus	094; 096	414	Kantelen	052
– numerieke waarden	096		Keersymmetrie [zie: Symmetrie]	
Evenwicht			KERN	
– indifferent	037		1 Voor spanningsberekening	
– labiel	037; 042-043		– bij rechthoekige doorsnede	475-476
– stabiel	037; 042-043; 052-053		– – volledig meewerkende dsn	476
– overgang stabiel → labiel	066-067		– – gedeeltelijk meewerkende dsn	477
Evenwichtbeschouwingen liggers	217		2 Onderdeel constructie	
Evenwichtsvoorwaarden	026-029		= Stijve kern	365
– in het platte vlak	034		KNIK	416 582
– in de ruimte	036		– omschrijving	582
Excentriciteit		471	– invloed vervormingen	583
Excentrisch belaste doorsnede		470	– berekening volgens Euler	584-585
Excentrische druk of trek		417; 475	– verklaring knikverschijnsel	586
[zie ook: Buiging plus normaalkracht]			1 Basis-belastinggevallen	
Excentrische dwarskracht			– ongeschoorde portalen	590
[zie: Wringing plus dwarskracht]		498	– geschoorde portalen	591
			2 Knik in onderling loodrechte richtingen	594
Flens		485	3 Knik bij buiging + normaalkracht	596
Fundering	055		– buigbelasting sinusvormig	597-598
– op staal	055		Knikkraft	584
– op palen	055		Kniklengte	585; 587
– schematisering ondergrond	056-057		– schetsen van kniklijnen	589
			Knikspanning	592
Gaapvergelijkingen		533	– algemene formulering	595
Gedeeltelijk meewerkende dsn	475		– globale dimensionering (voorbeeld)	592-593
Geknikte ligger:			– – bij $N + M$ (voorbeeld)	599
– L-vorm		542	Kolom	466
– T-vorm		543	Koord	300-301
– spanningsverdeling in de knik		544-545	Koppel	004
Geometrische liggerstijfheid		549	Krachten-methode	529
Geometrische stijfheidsverhouding		541		
Gereduceerd momentenvlak		573		
Glijdingsmodulus (afleiding)		499A		
Gravitatiwewet	030			
Grond (eigenschappen)	057			

KRACHT		MATERIAAL EIGENSCHAPPEN	
[zie ook: SAMENSTELLEN,		1 constructiemateriaal	094
Verplaatsen, Ontbinden van krachten]		2 ideaal materiaal (definitie)	095
- omschrijving	000-001	- contractie-coëfficiënt	095-096
- definitie volgens Newton	032	- elasticiteitsmodulus	095-096
- actie = reactie	031; 041	- uitzettingscoëfficiënt	097
- evenwichtmakende kracht	010	Mechanica (definitie)	016
- ontbondene van een kracht =		Meerbeukig portaal	382
component van een kracht	007	Meewerkende doorsnede	477
- resulterende kracht	010	Membraan-analogie	496
- tekenafspraken	012	Methode Cross	548
- weergave:		Moment	004
- - grafisch	008;001	- definitie statisch moment	004
- - analytisch	001	- definitie buigend moment	218
Krachten op liggers:		- tekenafspraken	033
- actie-krachten (uitwendige kr.)	207-209; 214	MOMENTENLIJN LIGGER	
- reactiekrachten	214	[zie ook: LIGGERS]	
- - tekenafspraken	216	1 Basis-belastinggevallen:	
- verwisselen actie- en reactiekr.	214; 236	- vrij opgelegde ligger met 1 puntlast	244-246
- inwendige krachten (spanningen)	209	- vrij opgelegde ligger met q -last	244-247
Krachtendriehoek	007	- uitkragende ligger met één puntlast	245
Krachtenveelhoek	011	- uitkragende ligger met q -last	245
Krachtenwerking		2 Variërende belasting	
(omschrijving vakgebied)	016	- Max. en minimum M -lijnen	
Kromming	423 504-505	- - q -last	286
Kromtestraal	419; 423	- - verplaatsbare puntlast	287
Kwadratisch oppervlaktemoment	425; 428; 448	3 Visualisering van de vorm	
- van een driehoek	435	m.b.v. een koord	296-299
- van een rechthoek	432	Momentensom	527
- van een cirkelvormige dsn	436	Momentenvlak-methode	574
- van een parallelogram	435	- methode I (vrij opgelegde ligger)	568-572
- van dunwandige profielen	449	- methode II (éénzijdig ingeklemde ligger)	574-575
L-vormige ligger	542	Neutrale lijn	418
Labiel evenwicht	042	Newton	032
LIGGER		Normaalkracht	098 417
- definitie	202 301-302	Normaalkracht + buigend moment	464
- vrij opgelegd (rol + scharnier)	206 568	Normaalspanning	408; 426
- vrij opgelegd met overstek	232; 273	Normale doorsnede	408; 411
- eenzijdig ingeklemd	207; 209; 225	Nulstaven (vakwerk)	338-339
- over meer steunpunten	535		
- - extra inwendige scharnieren	210; 212; 289-291	ONDERSTEUNINGEN	
- - zonder inwendige scharnieren	290-291	[zie ook: OPLEGGINGEN]	
- ondersteund door pendelstijlen	210	1 Ondersteuning I	
- - berekening oplegreacties	212-213	- continu	039
- - instabiele varianten	211	- lijnvormig	039
Lijf	485	- puntvormig	039
Lijnvormige elementen:		- star	040
- koorden, liggers, staven	300-301	- verend	040; 055-068
Lijnspanningstoestand	410-411	2 Ondersteuning II	
Lineair oppervlakte-moment	424, 428; 479	- inklemming	207-209
Lineair variërende belasting	241	- pendelstijl	210-211
Lineaire uitzettingscoëff. 097		- rol	206-208
		- scharnier	206-208

ONDERSTEUNINGEN

3 Ondersteuning rechthoekig blok (3D)

- in één punt (koord)	040-041
- in drie punten (star)	044-046
- continu door de ondergrond	
- - alleen verticale belasting (e.g.)	059
- - alleen horizontale belasting (wind)	060
- - verticale + horizontale belasting	062-063
- - gedeeltelijk meewerkend grondvlak	064-065

Ontbinden van krachten

1 In het platte vlak:

- inleiding eenvoudige gevallen	022-023
- langs drie gegeven werklijnen	024-025

2 In de ruimte

- Ontbondenen (van een kracht)	008
--------------------------------	-----

OPLEGGINGEN

087

1 Ideale opleggingen:

rol, scharnier, volledige inklemming

- ruimtelijk	088
- in het platte vlak	089

2 Realistische opleggingen

- voorbeelden	090
---------------	-----

Oplegreacties ligger (berekening):

- vrij opgelegde ligger	219
- éénzijdig ingeklemde ligger	225

Oppervlakte

428

Oppervlakte-moment;

425; 439

[zie ook: Doorsnede grootheden]

Oppervlakte-produkt;

425

[zie ook: Doorsnede grootheden]

Optimaliseren ligger:

- door verplaatsen v.d.opleggingen	288
------------------------------------	-----

Overgangsmoment

533

Paraboolvormige vakwerken

350

Parallelogram v. krachten

007

Pendelstijl

210

Permanente belastingen

074

Polonceauspant

315

Poolfiguur

293

PORTAAL

1 omschrijving

202-203

540

- eenbeukig, meerbeukig

203

- globale analyse

378-380 546-547

2 Berekening

- onder een verticale q -last

- - vergelijking met doorgaande ligger	546-547
- - berekening doorgaande liggers	548-549
- twee-scharnierspant	550-551
- onder een horizontale puntlast	359; 383
- ligger op twee ingeklemde stijlen	552
- volledig ingeklemd portaal	554-555
- - algemene formules portalen	555

Raamwerk (omschrijving)

203

- éénbeukig raamwerk =

stapeling van portalen

- - verticale belasting	381
- - horizontale belasting	383-385

Randvoorwaarden

091 259; 270

- invloed op verplaatsingen ligger

237

Rechthoekige staafwerken

312

Regel (constructiedeel; definitie)

202

540

Regel van Steiner

430-433

Rek

414; 423 557

Rekstijfheid

414 557

Relatie buigend moment - vervorming

 $(M - \kappa)$ diagram

502

Relatie vervorming en belasting $(\varphi, w - q)$

506-507

Resultante

008

- van twee krachten

010

Rol, Roloplegging

088

SAMENSTELLEN VAN:

1 Krachten

- Twee krachten door één punt:

- - analytische oplossing	008
- - krachtendriehoek (grafisch)	007
- - parallelogram van krachten	007

- Meer krachten door één punt:

- - krachtenveelhoek (grafisch)	011
---------------------------------	-----

- Krachten niet door één punt:

- - inleidende beschouwingen	013
- - analytische opl. (bewerkelijk)	017-019
- - grafische oplossing	016

- Krachten zijn evenwijdig:

- - analytische oplossing	020-021
---------------------------	---------

2 Kracht + koppel

015

3 Momenten

033

Scharnier

088

Schematiseren, Inleiding

068-069

Schematiseren van:

- de constructie	083
- constructie-onderdelen	086
- materiaal-eigenschappen	094-095
- opleggingen	087; 091-093

Schijven

368; 371-373

Schoren

367

Schuifspanning algemeen

408; 411

Schuifspanningsverloop

- ten gevolge van dwarskracht

480-485

- ten gevolge van wringing

487-494

Snedekrachten (definitie)

218

- Buigend moment M

218

- Dwarskracht V

218

- Normaalkracht N

218

- Tekenafspraken N, V, M

224-225

- Teken v. diagram. N, V, M

226-235

Sneeuwbelasting	077		
Soortelijke massa van lucht		401	
SPANNING I			
1 Algemeen		401; 406	
– in gassen en vloeistoffen		401	
– in vaste stoffen		402-403	
– in steenachtige materialen		404-407	
2 In een ideaal materiaal			
– definitie		406	
– notatie		408-409	
– teken (2D)		408	
– teken (3D)		409	
SPANNING II (naamgeving)			
1 Buigspanning =			
– lineair verlopende normaalspanning		426; 465	
– formules		426-427	
2 Normaalspanning (constante spanning)		408; 426; 465	
3 Resulterende spanning		408	
4 Schuifspanning t.g.v. dwarskracht bij:		408; 456	
– een rechthoekige dsn		481	
– een samengestelde rechthoekige dsn		478-480	
– dunwandige profielen		482-483	
– – vereenvoudigde berekening		484	
5 Schuifspanning t.g.v. wringing		487-493	
6 Belang horizontale schuifsp. bij buiging		485	
Spannings-rek-diagram		414	
Spanningscombinaties [zie: SPANNINGSVERDELING II]			
SPANNINGSVERDELING I			
1 Bij één basisbelastinggeval			
– t.g.v. Buigende momenten		418-426	
– t.g.v. Dwarskrachten		478-484	
– t.g.v. Normaalkrachten	094	416-417	
– t.g.v. Wringende momenten		486-497	
– – bij kokerprofielen		494-497	
SPANNINGSVERDELING II			
2 Spanningscombinaties		452	
– teken van de veerkrachtsgevallen		453	
3 Combinaties van veerkrachtsgevallen		454-455	
– buiging + dwarskracht		456	
– – buiging om de y-as of de z-as		458-459	
– – dubbele buiging		460-463	
– buiging + normaalkracht		464-467	
– – invoering druklijn		468-469	
– – excentrisch belaste rechth. dsn.		470-471	
– – dubbele buiging + normaalkracht		474	
Spant			
– omschrijving	203	308	
– twee-scharnierspant	203		
– drie-scharnierspant	203	407	
Staaft (definitie)	202	300-301	
Staaftwerk			
– driehoekig stramien		302	
– rechthoekig stramien		303	
– – buigvaste verbinding staven		304	
Stabiel evenwicht		042	
Stabiliteit		037; 070	354
Stabiliteit (constructie-eis)		073	
– 1e orde stabiliteit; [zie: Standzekerheid]			
– 2e orde stabiliteit; [zie: Knik]			
Standzekerheid (omschrijving)			354-355
Stangenveelhoek		293	
Stapelbouw 3D			
– verschillende wijzen van stapelen			360-361
– standzekerheid			362-363
– – opbouw uit lijnvormige elementen			364-366
– – opbouw uit vlakke elementen			368-369
Stapel van portalen		381	
Statisch bepaald hoofdsysteem			530
Statisch bepaalde constructie			
– omschrijving	204		528
– berekening statisch bepaalde ligger			502
Statisch bepaalde staafwerken en vakwerken			
–		308	
Statisch moment			
(= lineair oppervlakte-moment)			428
Statisch onbepaalde constructies			
– omschrijving	204		529
– berekening statisch onbep. ligger	205		503
Steenachtige materialen ?			404
Sterkte (constructie-eis)	071		
Stijfheid (constructie-eis)	072		
– Cross-stijfheid (= liggerstijfheid)			541
– Staaft-stijfheid			541
Stijl (constructie-onderdeel;			
– definitie	202		540
Stijve kern		365	
Stroomlijnen-analogie			487
Structuur-Mechanica			404-407
Stuik			557
Stuwdruk (wind)	078		
– numerieke waarden	079		
Stijgende diagonalen		327	
SUPERPONEREN VAN			
MOMENTENLIJNEN LIGGERS			
Overzicht methoden I, II, III		278	
I Splitsen van de belasting			
– momenten van gelijk teken	279		
– momenten van ongelijk teken	280		
– voorbeelden	281		
II Splitsen van de ligger in moten			
– combinatie van I en II	283		
III Verplaatsen v. d. opleggingen			
– combinatie van II en III	285		
Symbolen			
– omschrijving	010		
– lijst van symbolen	012		
Symmetrie en Keersymmetrie			
– belasting op koorden	297		560
– belasting op liggers	296-297		

Tekenafspraken vervormingen:					
- helling		505			
- kromming		505			
- zakking		505			
Teken van snedekrachten	224				
- tekenafspraken		431			
Temperatuur	097				
Tensor		408			
Traagheidsmoment		428			
[zie: Kwadratisch oppervlakte-moment]					
Trek, trekkracht (vakwerk)		309			
Twee-scharnierspant		378	540; 550		
<hr/>					
Uitzettings-coëfficiënt	097				
<hr/>					
Vakwerken (omschrijving)	203	314			
- vakwerkvormen		315			
- schematisering		316			
Vakwerkligger	203	314			
Vakwerkspant	203	315			
Vallende diagonalen		327			
Variërende buigstijfheid			573		
Vector					
- kracht-vector	008	001			
- moment-vector	033				
Veerkrachtsgevallen			452-455		
Veerstijfheid	064				
Veranderlijke belastingen	074				
- op vloeren	076				
Verende inklemming	207				
Veren-model					
- voor een buigend moment op een staaf	099				
- voor een normaalkracht op een staaf	098				
- voor de ondergrond	056-057				
- - gedeeltelijk meewerkend grondvlak	065				
Vergeet-me-nietjes			517; 576		
- toepassingen			520-521		
- controle basis-belastinggevallen			524-525		
Verplaatsen van een kracht					
- langs de werklijn	001				
- buiten de werklijn	014				
Verplaatsingsmethode			529		
Versterkte balken			564		
Verstijvingskruis		367			
Verticale schijven		368			
VERVORMINGEN I					
1 Principe					
- bij een lijnspanningstoestand		414			
- bij zuivere buiging		418			
- bij wringing + dwarskracht		499			
- bij zuivere afschuiving					
- - bepaling glijdingsmodulus			A-400		
<hr/>					
2 Oorzaak vervormingen bij liggers					
- door buigende momenten			565		
- door normaalkracht			558		
- door schuifspanningen			A-400		
3 Constructie-type					
- vrij opgelegde ligger		233			
- - invloed randvoorwaarden		237			
VERVORMINGEN II : Rekenmethodiek bij:					
1 Normaalkrachten			556-564		
- bij twee geschoorde staven			558-559		
- bij een symmetrisch belast koord			561		
- bij vakwerken (Williot)			563		
- bij een versterkte balk			564		
2 Buigende momenten analytisch					
- benodigde differentiaalvergelijking			565		
- splitsen van de differentiaalvergelijking			566-567		
3 Buigende momenten grafisch:					
Momentenvlak-methode I,					
- voor vrij opgelegde liggers			558-569		
- - belast door een puntlast			570-571		
- - belast door een q -last			572		
4 Buigende momenten grafisch:					
Momentenvlak-methode II,					
- voor éénzijdig ingeklemde liggers			574-578		
- - recapitulatie vergeet-me-nietjes			576-577		
- - algemene toepassing			578		
- - willekeurig gekromde ligger			579		
- volledig ingeklemd portaal			580		
- drie-scharnierspant			581		
Verwelling			486		
Vlak staafwerk		308			
Vlakke spanningstoestand			412-413		
Vlakke doorsneden blijven vlak			418		
Volledig ingeklemd portaal			554		
Volledige inklemming	088-089	209			
Volumegewicht	075				
Voorschriften:					
- inleiding	070				
- overzicht TGB 1990	070				
Vormvastheid staafwerken		305-307			
- driehoekig stramien		310-311			
- rechthoekig stramien		312-313			
Vrij opgelegde ligger		206; 270			
<hr/>					
Waterdruk			402		
Weerstandsmoment			421; 427-428		
Werklijn	007				
Wet van Hooke	009	414	557		
Wetten van Newton:					
1 Gravitatiewet	030				
2 Bewegingswetten	031				
- wet van de traagheid	031				
- kracht = massa \times versnelling	031				
- actie = reactie	031				
3 Relatie kracht - massa	032				

Williot diagram		562-563
Windbelasting	078	
– winddruk	079	
– windzuiging	079	
– windvormfactoren	079	
Wrijving	047	
– bij een horizontaal contactvlak	047	
– bij een hellend contactvlak	048	
– wrijvingscoëfficiënt	047	
Wringing plus dwarskracht		498
WRINGSTIJFHEID		
1 Massieve profielen		
– rechthoekig profiel		488
– cirkelvormig profiel		492-493
2 Dunwandige profielen		
– enkelvoudig samenhangend		491
– meervoudig samenhangend		494-495
– – visualisatie via de membraan-analogie		496-497
Zeepvlies-analogie (wringing)		487
Zuiver buigend moment		424
Zuivere buiging		418
Zuivere druk of trek		416
Zuivere wringing		486
Zwaartelijn		429
Zwaartepunt (rechth. blok)	038	424; 429

